Lineare Algebra 2 **7. Juli 2003**
SoSe 2003
Schmale

12. Aufgabenblatt

Abgabe bis Montag 14. Juli 2003

(43) (8 Punkte) **Begleitmatrizen und zyklische Moduln**:
Sei K ein Körper und R ein kommutativer Ring

(a) Seien $A \in R^{n\times n}$ und $v \in R^{n\times 1}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion und mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton:

$$< \{A^k v : k \in \mathbb{N}\} >_R \; = \; < \{A^k v : 0 \leq k \leq n-1\} >_R$$

(b) Sei $p \in R[x]\backslash R$ ein Polynom mit höchstem Koeffizienten 1. Seien weiter $d = \mathsf{deg}\, p$ und $C \in R^{d\times d}$ die Begleitmatrix zum Polynom p. Zeigen Sie: Es gibt ein $v \in R^{d\times 1}$ derart, dass $R^{d\times 1} \; = \; < \{C^k v : k \in \mathbb{N}\} >_R$. Man sagt dann auch: $R^{d\times 1}$ ist C-zyklisch.

(c) Zeigen Sie: Wenn es zu $A \in K^{n\times n}$ einen Vektor $v \in K^{n\times 1}$ gibt, derart, dass

$$K^{n\times 1} \; = \; < \{A^k v : k \in \mathbb{N}\} >_K ,$$

dann ist $\mu_A = \varphi_A$.

(44) (4 Punkte) **Zeilen- und Spaltenmodul über einem euklidischen Ring**
Sei zunächst R ein kommmutativer Ring und daran erinnert (LA1), dass, falls eine endliche Basis existiert, die Länge einer Basis eines R-Moduls V eindeutig durch V bestimmt ist. In diesem Fall wird definiert: $\mathsf{dim}_R V :=$ Länge einer Basis.

Seien nun R euklidisch, $M \in R^{m\times n}$, etwa $M = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = [w_1, \cdots, w_n]$ und wie in LA1

$$\mathsf{ZR}\,(M) := < v_1, \cdots, v_m >_R = \Big\{ \; R\text{-Linearkombinationen der Zeilen } v_1, \cdots, v_m \Big\} \subseteq R^{1\times n}$$
$$\mathsf{SR}\,(M) := < w_1, \cdots, w_n >_R = \Big\{ \; R\text{-Linearkombinationen der Spalten } w_1, \cdots, w_n \Big\} \subseteq R^{n\times 1}$$

Zeigen Sie mit Hilfe geeigneter Ergebnisse aus Teil II des Skripts bzw. der Vorlesung und mit Hilfe der Sätze III,13.1 und 13.2:

$$\mathsf{dim}_R\,\mathsf{ZR}\,(M) \; = \; \mathsf{dim}_R\,\mathsf{SR}\,(M)$$

(45) (8 Punkte) In $\mathbb{Z}^2$ seien gegeben: $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 24 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, U =< u_1, u_2 >_{\mathbb{Z}}$ und $W =< w_1, w_2 >_{\mathbb{Z}}$.

(a) Bestimmen Sie v_1, v_2 so, dass $U + W =< v_1, v_2 >_{\mathbb{Z}}$
und zeigen Sie:

(b) mit $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 36 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$ ist $< x_1, x_2 >_{\mathbb{Z}} = U \cap W$,

(c) die Untermoduln $U, W, U + W, U \cap W$ sind paarweise verschieden,

(d) $U, W, U + W, U \cap W$ haben die $\mathbb{Z}$-Dimension 2. Vergleichen Sie Letzteres mit Satz III,13.3.

(46) (5 Punkte)

(a) Bearbeiten Sie die Aufgabe (19) aus der Liste der Klausuraufgabenbeispiele.

(b) Bearbeiten Sie die Aufgabe (20) aus der Liste der Klausuraufgabenbeispiele.

Bearbeiten Sie Aufgaben im Umfang von ca. 20 Punkten.