Lineare Algebra 2 **28. April 2003**
SoSe 2003
Schmale

2. Aufgabenblatt

Abgabe bis Montag 5. Mai 2003, 10 Uhr
Bitte Namen,Übungsgruppe/Tutorin rechts oben angeben.

(5) Houshoulder[1]-Matrizen

Sei $w \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ und gelte ${}^{\mathsf{t}}w \cdot w = 1$. Weiter sei $W = w^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \ {}^{\mathsf{t}}v \cdot w = 0\}$, $H := E_n - 2\, w \cdot {}^{\mathsf{t}}w$ und $L_H : \ \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$ die durch H induzierte lineare Abbildung.
H heißt *Housholder-Matrix.*
Zeigen Sie:

(a) L_H ist Spiegelung an der Hyperebene W (vgl. Aufgabe (3/4)).

(b) ${}^{\mathsf{t}}H = H$ und $H^2 = E_n$.

(c) Seien $x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ zwei Vektoren der Länge 1. Bestimmen Sie einen Vektor der Länge 1 derart, dass mit der zugehörigen Housholder-Matrix H gilt: $Hx = y$.

(d) Eine Anwendung: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und die erste Spalte von A sei $\neq 0$. Es gibt eine orthogonale Matrix Q derart, dass QA in Zeilenstufenform ist.

(e) Ist in (d) die Matrix A selbst orthogonal, so ist QA automatisch eine Diagonalmatrix.

(f) Weitere Anwendung: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gibt eine orthogonale Matrix Q derart, dass für $M = QAQ^{-1} = (m_{ij})$ gilt:
(i) $m_{ij} = 0$, für $1 \leq i, j \leq n$ und $i > j+1$
(ii) $m_{i+1,i} \in \{0, 1\}$ für $1 \leq i \leq n$.

Matrizen $M = (m_{ij})$, die der Bedingung (f)(i) genügen, heißen *Hessenberg-Matrizen*[2].

Die Bedeutung der Housholder-Matrizen liegt hier darin, dass Sie in vielen Fällen numerisch stabile und längentreue (!) Basiswechsel ermöglichen. Dies ist der Eigenvektorberechnung vorzuziehen, da dann zuerst Eigenwerte berechnet werden müssen, was i.A. sehr aufwendig und fehlerträchtig ist. Wie es sich im Aufgabenteil (f) zeigt, stößt man in diesem Kontext auf Hessenberg-Matrizen. Mehr Informationen dazu z.B. in dem Buch *Matrices: Theory and Applications*, Springer Verlag, 2002 von Dennis Serre (insbesondere ab S. 169).

Bearbeiten Sie ausführlich **(a)**,**(b)**,**(c)** und **(e)** unter der Voraussetzung **(d)** und beschreiben Sie in Worten, soweit es Ihnen möglich, ist jeweils ein Verfahren, das die Aufgaben in **(d)**, **(f)** löst.

---

[1] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Householder.html
[2] http://mathworld.wolfram.com/HessenbergMatrix.html
http://scienceworld.wolfram.com/biography/Hessenberg.html