Lineare Algebra 2 **5. Mai 2003**
SoSe 2003
Schmale

3. Aufgabenblatt

Abgabe bis Montag 12. Mai 2003, 10 Uhr

(6) (6 Punkte) Sei $A = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$. L_A ist eine Drehung im $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel.

(b) Bestimmen Sie die Eulerschen Winkel von L_A.

(7) (10 Punkte) **Verallgemeinerte Umkehrabbildung oder Moore-Penrose-Inverse**[1] Seien V, W euklidische Vektorräume, $F : V \to W$ linear, $X = \mathsf{Kern}\, F$, $Y = \mathsf{Bild}\, F$ und sei V endlichdimensional. Aus der linearen Algebra 1 wissen wir, dass für alle $w \in W$ die Menge $F^{-1}(w) = \{v \in V : \ F(v) = w\}$ ein affiner Unterraum von V ist mit den Eigenschaften

(i) $F^{-1}(w) \neq \varnothing \Leftrightarrow w \in Y$

(ii) $\forall y \in Y \ \forall v \in F^{-1}(y) : \ F^{-1}(y) = v + X$

(iii) $\forall y \in Y \ \forall v \in F^{-1}(y) :$
$F^{\#}(y) := P_{X^\perp}(v)$ ist der eindeutig bestimmte kürzeste Vektor in $F^{-1}(y)$.

Mit Hilfe der orthogonalen Projektion auf den endlichdimensionalen Unterraum Y lässt sich $F^{\#}$ auf ganz W wie folgt fortsetzen

$$F^{\#} : W \to V \quad \text{mit} \quad F^{\#}(w) := F^{\#}\big(P_Y(w)\big) \text{ für } w \in W$$

$F^{\#}$ heißt *verallgemeinerte Umkehrabbildung* oder *Moore-Penrose-Inverse* von F. Wenn speziell $V = \mathbb{R}^{n\times 1}, W = \mathbb{R}^{m\times 1}$ mit kanonischen Skalarprodukten, $F = L_A$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $F^{\#} = L_{A^{\#}}$ mit der durch F eindeutig bestimmten Matrix $A^{\#}$, dann heißt $A^{\#}$ Moore-Penrose-Inverse von A.

Zeigen Sie:

(a) (3 Punkte) $F^{\#}$ ist linear.

(b) (2 Punkte) Ist F injektiv (surjektiv), dann ist $F^{\#}$ surjektiv (injektiv). Ist F bijektiv, dann ist $F^{\#} = F^{-1}$.

(c) (5 Punkte) Beispiel: Seien jetzt speziell $V = \mathbb{R}^{3\times 1}, W = \mathbb{R}^{4\times 1}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ und $F = L_A$. Bestimmen Sie die Moore-Penrose-Inverse $A^{\#}$ von A.

(8) (6 Punkte)(Fortsetzung von (7)) Beweisen Sie '(i) oder (ii)'und '(iii) oder (iv)'aus den folgenden sogenannten Moore-Penrose-Bedingungen, durch die $F^{\#}$ und ggf. die zugehörige Matrix $A^{\#}$ charakterisiert[2] sind:

(i) $F^{\#}FF^{\#} = F^{\#}$

(ii) $FF^{\#}F = F$

(iii) $\forall w, w' \in W : \ (\!(FF^{\#}(w)\,, w')\!) = (\!(w\,, FF^{\#}(w'))\!)$

(iv) $\forall v, v' \in V : \ (\!(F^{\#}F(v)\,, v')\!) = (\!(v\,, F^{\#}F(v'))\!)$

Die Bedingungen (iii) und (iv) besagen, dass $FF^{\#}$ und $F^{\#}F$ selbstadjungiert sind (vgl. [F] S. 312). Sie dürfen beim Beweis benutzen, dass orthogonale Projektionen (hier $P_{X^\perp}$ und P_Y) selbstadjungiert sind.

[1] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Moore_ Eliakim.html
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Penrose.html
http://mathworld.wolfram.com/Moore-PenroseMatrixInverse.html

[2] Siehe z.B. das im Aufgabenblatt 2 zitierte Buch von D. Serre S. 145-147 oder etwa S. Barnett: Matrices in Control Theory, van Nostrand, 1971, S. 131.