Lineare Algebra 2 **19. Mai 2003**
SoSe 2003
Schmale

5. Aufgabenblatt

Abgabe bis Montag 26. Mai 2003

(13) (5 Punkte) **Quadratwurzelsatz**

(a) Sei die reelle und symmetrische $n \times n$-Matrix A positiv definit. Zeigen Sie:
Es gibt genau eine positiv definite Matrix $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ derart, dass $W^2 = A$.
Anleitung:
Existenz: Sätze 12.22 und 14.17 benutzen, $(PU\,{}^{\mathsf{t}}P)^2 = P(U^2)\,{}^{\mathsf{t}}P$, wenn ${}^{\mathsf{t}}P$ orthogonal.
Eindeutigkeit: Mit einem Eigenvektor v von A zum Eigenwert λ und mit $u := Wv - \sqrt{\lambda}\ v$ gilt $Wu = -\sqrt{\lambda}\ u$. W kann nur positive Eigenwerte haben (warum ?). Es folgt $u = 0$.
Betrachte nun insgesamt den Effekt von W auf einer Eigenvektorbasis für A, Satz 8.8.

(b) Berechnen Sie $\sqrt{A}$, wenn

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(14) (5 Punkte) Ein Beweis des **Hauptminorenkriteriums**[1].
Seien $n \in \mathbb{N}_+$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, etwa $A = (a_{ij})$ und $A_k = (a_{ij})_{1\le i,j\le k}$ für $1 \le k \le n$, $d_k = \det A_k$. Letztere Zahlen sind die so genannten Hauptminoren (vgl. Vorlesung 14.16).
Zeigen Sie:

(a) Seien $d_1, \ldots, d_n$ alle von 0 verschieden. Es gibt dann ein $P \in GL(n, \mathbb{R})$ derart, dass gilt:
(i) P ist obere Dreiecksmatrix mit 1-en in der Diagonale
(ii) ${}^{\mathsf{t}}PAP = \operatorname{diag}\big(d_1, d_2/d_1, \ldots, d_n/d_{n-1}\big)$

Anleitung:
$A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} = \begin{bmatrix} A_n & w \\ {}^{\mathsf{t}}w & \alpha \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} E_n & -A_n^{-1}w \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ${}^{\mathsf{t}}PAP$, $\det({}^{\mathsf{t}}PAP)$, Induktion.

(b) A positiv definit $\iff$ $d_1, \ldots d_n$ positiv
Anleitung: Benutze Satz 14.7.

(15) (5 Punkte) **Hauptachsentransformation**[2]
Transformieren Sie die folgenden Quadriken-Gleichungen in Hauptachsenlage und fertigen Sie eine Skizze an:

(a) $g(x_1, x_2) = -14x_1^2 + x_2^2 + 36x_1x_2 + 16x_1 - 2x_2 - 53 = 0$,

(b) $h(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - x_1x_2 - 6x_1 + 12x_2 + 8 = 0$.

(16) (5 Punkte) **komplexe Diagonalisierung einer Drehung.**
Seien $n = 2$, $A = D(1, 2, a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$. Zeigen Sie: A ist in $\mathbb{C}^{2\times 2}$ diagonalisierbar und bestimmen Sie eine Matrix $P \in GL(2, \mathbb{C})$ derart, dass P^*AP eine Diagonalmatrix ist. (Zur Erinnerung: $P^* = {}^{\mathsf{t}}\overline{P} = \overline{{}^{\mathsf{t}}P}$). Anleitung: Eigenvektorbasis.

[1] Die Aufgaben (13) und (14) sind orientiert an Textstellen aus dem Buch *'Lineare Algebra und analytische Geometrie'* von Max Köcher, Springer Verlag (1983), Seiten 121 ff., 149 ff. und Seite 198; das Ergebnis in (a) heißt dort **Satz von Jacobi**.

[2] Diese sowie auch bereits die Aufgabe (12) sind dem Buch *'Mathematik 1 für Studierende der Ingenieurwissenschaften'* von Wolfgang Mackens und Heinrich Voß (Heco-Verlag 1993) entnommen oder daran angelehnt.