Lineare Algebra 2 **26. Mai 2003**
SoSe 2003
Schmale

6. Aufgabenblatt

Abgabe bis Montag 2. Juni 2003

(17) (5 Punkte) **Die Matrixnormen $\| \cdot \|_2$, $\| \cdot \|_F$ und orthogonale Äquivalenz.**

(a) Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $P \in \mathcal{O}(n)$. Zeigen Sie:

$$\| PA \|_2 = \| AP \|_2 = \| A \|_2$$

(b) Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $P \in \mathcal{O}(m), Q \in \mathcal{O}(n)$. Zeigen Sie:

$$\| PA \|_F = \| A \|_F = \| AQ \|_F$$

Anleitung: $\| A \|_F^2$ ist eine Summe von geeigneten Längenquadraten, Längentreue.

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie:

$$\| A \|_2 = s_r \quad \text{und} \quad \| A \|_F = \sqrt{s_r^2 + \cdots + s_1^2}\,,$$

wobei $s_1, \ldots, s_r$ die der Größe nach aufsteigend geordneten Singulärwerte von A sind.

(18) (5 Punkte) Weisen Sie folgende Regel nach für $(\mathbb{Z}_d, \bigoplus, \bigodot)$ (vgl. I,1.1 im Skript):

$$\forall\, r, s, t \in \mathbb{Z}_d : \quad r \odot (s \oplus t) = r \odot s \ \oplus\ r \odot t$$

(19) (5 Punkte) **Elementare lineare Algebra über kleinen endlichen Körpern.**

Sei K ein Körper und $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie $\mathsf{Eig}\,(\mathrm{A})$, wenn

(a) $K = \mathbb{Z}_2$
(b) $K = \mathbb{Z}_5$
(c) $K = \mathbb{Z}_{11}$

(20) (5 Punkte) **Rechtsuntermoduln von $\mathbb{Q}^{3\times 3}$.** Sei $R = \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie eine Matrix $B \in R$, die das von den drei Matrizen

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

erzeugte Rechtsideal in R erzeugt (vgl. Def. I,1.13).

(b) Geben Sie zwei $\mathbb{Q}$-linear unabhängige Matrizen aus R an, die ein echtes Rechtsideal in R erzeugen ($\neq 0, \neq R$).