Lineare Algebra 2 **2. Juni 2003**
SoSe 2003
Schmale

7. Aufgabenblatt

Abgabe bis Dienstag 10. Juni 2003

(21) (5 Punkte) **Fortsetzung von ϱ_d auf $\mathbb{R}$.** Sei $d \in \mathbb{N}_+$.

(a) Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $s \in \mathbb{Z}$ und genau ein $r \in \big[0\ ,\ d\big)$ derart, dass $z = sd + r$. Dabei gilt $r = z - \left\lfloor \frac{z}{d} \right\rfloor d$. $\quad$ ($\lfloor x \rfloor$:=größte ganze Zahl $\leq x$.)

(b) Zu $z \in \mathbb{R}$ sei $\varrho_d(z) = z - \left\lfloor \frac{z}{d} \right\rfloor d$. Die Aussagen (a) bis (d) von Satz 2.3 gelten entsprechend. Beweisen Sie davon (b) für $z \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{Z}$, (c) und (d) für $z, z' \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass (e) nicht für alle $z, z' \in \mathbb{R}$ gilt.

(22) (5 Punkte) Konstruieren Sie ähnlich wie in den Beispielen der Vorlesung vom 28.5. einen **Körper L mit 8 Elementen**.
Wie viele Wahlmöglichkeiten gibt es bei dieser Konstruktion ? Sei q das von Ihnen zu Grunde gelegte Primpolynom aus $\mathbb{Z}_2[x]$. Berechnen Sie $\varrho_q(x^8 - x)$. Erstellen Sie eine Multiplikationstabelle (Vorschlag: α statt x schreiben). Wie viele Nullstellen hat das Polynom $x^8 - x$ in L ? Suchen Sie ein Element $\beta \in L$ mit der Eigenschaft $L = \{0\} \cup \{\beta^k : k \in \mathbb{N}\}$.

(23) (5 Punkte) **$\mathbb{Z}_6$ auf dem Einheitskreis.** Die Abbildung $\phi:\ \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei gegeben durch die Vorschrift: $\phi(z) = a^z$ mit $a = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ und für $z \in \mathbb{Z}$.

(a) Bestimmen Sie $S := \mathsf{Bild}\,\phi$ und machen Sie eine Skizze von S.

(b) Bestimmen Sie $\phi^{-1}(1)$

(c) Legen Sie in S Verknüpfungen $\boxplus, \boxdot$ fest derart, dass S ein kommutativer Ring wird und ϕ ein Ringmorphismus wird. Weisen Sie dabei exemplarisch nur die Existenz eines 0-Elementes und eines 1-Elementes und ein Distributivgesetz nach.

Anleitung zu (a),(b),(d): $a^{s \cdot 6 + r} = a^r$; Division mit Rest.
Bemerkung: Auch hier ergibt sich mit Hilfe von Satz 1.23 die Ringisomorphie $S \cong \mathbb{Z}_6$.

(24) (5 Punkte) **Matrix-Modell für $\mathbb{F}_4$.** Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ und $L := < E_2, A >_{\mathbb{Z}_2}$.

(a) L ist Unterring von $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ und es ist $|L| = 4$:

(b) L ist ein Körper und es gilt $B^4 = B$ für alle $B \in L$.

(c) Sei $\pi_A : \mathbb{Z}_2[x] \longrightarrow L$ der durch Eisetzen von A entstehende Ringhomomorphismus und sei q das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie: $\mathsf{Kern}\,\pi_A = q\mathbb{Z}_2[x]$

(d) Vergleichen Sie L und den Körper $(\mathbb{Z}_2[x])_{2,x^2+x+1}$ mit Hilfe von Satz 1.23.

(25) (5 Punkte) Sei K ein Körper und $R = < 1, x^2, x^3, ... >_K$. Zeigen Sie:

(a) R ist ein Unterring von $K[x]$.

(b) In R sind x^2 und x^3 zwar **unzerlegbar** in R (!), **aber nicht prim** in R.

Anleitung zu (b): Gradüberlegungen führen zur Unzerlegbarkeit; Betrachte dann u.a. $(x^3)^2$.

Wählen Sie 4 Aufgaben.