8. Aufgabenblatt

Abgabe bis Montag 16. Juni 2003

(26) (7 Punkte) Zu einem **Rechtsideal** $\boldsymbol{I \subseteq K^{n\times n}}$ sei

$$U := \{u \in K^{n\times 1} : \ u \text{ ist Spalte einer Matrix aus } I\} \ .$$

(a) Weisen Sie nach, dass U ein Untervektorraum ist.

(b) Falls $I \neq 0$, sei $(u_1, \ldots, u_r)$ eine Basis von U und $A \in I$. Zeigen Sie: Es gibt $w_1, \ldots, w_n \in K^{n\times 1}$ derart,dass

$$A = \big[u_1, \ldots u_r, 0 \ldots, 0\big] \cdot \big[w_1, \ldots, w_n\big] \ .$$

(c) Beweisen Sie Satz 5.3 für „Rechts“.

(27) (7 Punkte) **Beispiel für einige der wichtigsten Klasseneinteilungen der linearen Algebra für Matrizen**
Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$

(a) $G(\mathbb{Z}_2^{2\times 2})$,

(b) alle Ähnlichkeitsklassen,

(c) alle Äquivalenzklassen,

(d) alle Linksäquivalenzklassen

(e) alle Rechtsäquivalenzklassen

[Erinnerung an LA 1 reduziert drastisch den Aufwand: det, charakteristisches Polynom und Diagonalisierbarkeit, Rang, Zeilenstufenform (benutzen Sie ohne Beweis die Eindeutigkeit der reduzierten Zeilenstufenform), Transposition.]

(28) (7 Punkte) Sei $R = \mathbb{Z}_2[x]$ und seien $A \in R^{3\times 4}, b \in R^{3\times 1}$ gegeben als

$$A := \begin{bmatrix} x^2+1 & x+1 & x+1 & x^2+1 \\ x+1 & x^2+1 & x+1 & x^2+1 \\ x+1 & x+1 & x^2+x+1 & x^2+x+1 \end{bmatrix} \ , \ b := \begin{bmatrix} x^6+x^3+x^2+1 \\ x^6+x^3+x^2+1 \\ x^6+x^5+x^3+x+1 \end{bmatrix} \ .$$

(a) Berechnen Sie die **Smith-Form** von A. Der Gang der Rechnung soll dokumentiert werden. Natürlich können Sie zur Probe auch einmal „Smith(A,x) mod 2;“in MAPLE ausprobieren.

(b) Bestimmen Sie $\mathsf{Lös}\,(A,b) = \{v \in R^{4\times 1} : \ Av = b\}$. Auch hier soll der Rechenweg dokumentiert werden. Ein Vergleich mit dem Ergebnis von MAPLE wäre hier möglich über „Linsolve(A,b) mod 2; “