Lineare Algebra 2 **16. Juni 2003**
SoSe 2003
Schmale

9. Aufgabenblatt

Abgabe bis Montag 23. Juni 2003

(29) (6 Punkte) **Zur Definition des Minimalpolynoms einer Matrix**

(a) Seien K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie: Es gibt genau ein Polynom $q \in K[x]\backslash K$ minimalen Grades und mit höchstem Koeffizienten 1 derart, dass außerdem gilt $q(A) = 0$.

(b) Sei R ein kommutativer Ring und seien $p, q \in R[x]$ Polynome mit höchsten Koeffizienten 1. Zeigen Sie: $pR[x] = qR[x] \Rightarrow p = q$

(30) (6 Punkte)

(a) Verfolgen Sie Schritt für Schritt im Spezialfall $R = \mathbb{Z}$ und mit

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 10 & 12 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

den auf der Rückseite angegebenen zentralen **Baustein für einen Algorithmus zur Berechnung der Smithform**. Geben Sie die Matrizen an, die „unterwegs “mit M bezeichnet werden, und die zu berechnenden Werte von *such(M)* und zwar alles in chronologischer Reihenfolge mit kurzen Erläuterungen.

(b) Begründen Sie, warum der Algorithmus stets nach endlich vielen Schritten abbricht.

(31) (8 Punkte) **Bezout-Identität und lineares Gleichungssystem**

(a) In $\mathbb{Z}_2[x]$ seien $f_1 = x^5 + x^3 + x^2 + 1, f_2 = x^5 + x^4 + x + 1, f_3 = x^5 + 1$. Bestimmen Sie den größten (normierten) gemeinsamen Teiler g von f_1, f_2, f_3 und Polynome h_1, h_2, h_3 aus $\mathbb{Z}_2[x]$ derart, dass $f_1h_1 + f_2h_2 + f_3h_3 = g$.

(b) Bringen Sie die folgende Matrix A aus $\mathbb{Z}^{3\times 4}$ in (positive) Smithform:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 & 6 \\ 5 & -4 & 11 & 12 \\ 11 & 4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 1}$, für die das lineare Gleichungssystem „$Ax = b$“ eine ganzzahlige Lösung besitzt.

(32) (8 Punkte) Seien R ein kommutativer Ring und $A = \left(a_{ij}\right) \in R^{m\times n}$. Der von der Einträgen von A erzeugte R-Untermodul von R (=Ideal) heißt **Inhalt der Matrix *A*** und wird mit ***c*(*A*)** bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) $\forall\ A \in R^{m\times n}, B \in R^{n\times r} :\ c(AB) \subseteq c(A) \cap c(B)$

(b) $c(E_m) = R$ und $c(P) = R$ für alle $P \in G(R^{m\times m})$

(c) $\forall P \in G(R^{m\times m})\ \forall A \in R^{m\times n}\ \forall\ Q \in G(R^{n\times n}) :\ c(PAQ) = c(A)$
Anwendung: elementare Umformungen einer Matrix ändern deren Inhalt nicht.

(d) Wenn der R-Untermodul $c(A)$ von einem Element g erzeugt wird (Hauptideal), dann ist g ein ggT der Einträge von A.

Bearbeiten Sie die Aufgaben (29), (30) und eine weitere Aufgabe.