Wiederholung und Hintergrundwissen für die ersten beiden Übungsaufgaben

Orthogonale Projektion auf einen Untervektorraum und Abstand zweier affiner Unterräume

Sei im Folgenden stets V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\!\langle \cdot\,,\cdot \rangle\!\rangle$. Wie üblich wird dann für $v, v' \in V$ der Abstand von v, v' mit $d(v, v')$ und die Länge von v mit $\| \, v \, \|$ bezeichnet. Dabei ist $\| \, v \, \| = \sqrt{\langle\!\langle v\,, v \rangle\!\rangle}$ und $d(v, v') = \sqrt{\langle\!\langle v - v'\,, v - v' \rangle\!\rangle} = \| \, v - v' \, \|$.
Zur Erinnerung: Je zwei verschiedene Basisvektoren einer Orthogonalbasis (OB) sind orthogonal, sie brauchen nicht die Länge 1 haben. Ist Letzteres der Fall, so spricht man von einer Orthonormalbasis (ONB).

(A) Orthogonale Projektion auf Untervektorräume:
Sei W ein endlichdimensionaler Untervektorraum (UVR) von V und sei $(w_1, \ldots, w_r)$ eine OB von W. Für $v \in V$ ist dann

$$P_W(v) := \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle\!\langle v\,, w_i \rangle\!\rangle}{\langle\!\langle w_i\,, w_i \rangle\!\rangle} w_i$$

die orthogonale Projektion von v auf W. Man kann zeigen (siehe LA1), dass gilt:

$$d(v, P_W(v)) = \| \, v - P_W(v) \, \| \leq \| \, v - w \, \| = d(v, w) \quad \text{für alle} \quad w \in W$$
$$\text{und ,,}=\text{` nur für } w = P_W(v).$$

(B) Abstände von Unterräumen: Seien jetzt W und W' endlichdimensionale Untervektorräume von V, $x, x' \in V$ und $\Gamma = x + W, \Gamma' = x' + W'$ affine Unterräume. Ihr Abstand ist definiert als

$$d(\Gamma, \Gamma') := \mathsf{inf}\{d(y, y') : \; y \in \Gamma, y' \in \Gamma'\}.$$

Man kann nun zeigen (LA1), dass gilt:

$$d(\Gamma, \Gamma') = d(x - x', W + W')$$

$d(x - x', W + W') = d(\{x - x'\}, W + W')$ ist der Abstand des Punktes (spezieller affiner Unterraum) $x - x'$ von $W + W'$. Wegen (A) gilt

$$d(x - x', W + W') = d(x - x', P_{W+W'}(x - x')) = \| \, (x - x') - P_{W+W'}(x - x') \, \|$$

Damit kann der Abstand zweier endlichdimensionaler affiner Unterräume mit Hilfe von (A) berechnet werden, indem man zuerst eine OB von $W + W'$ bestimmt, dann $y^* := P_{W+W'}(x - x')$ berechnet und dann

$$d(\Gamma, \Gamma') = d(x - x', y^*) = \| \, x - x' - y^* \, \|$$