Blatt 4, Aufgabe 12

Musterlösung

Modul Algebra

23. Juni 2005

Komplexe Diagonalisierung einer Drehung
Sei

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

mit $a^2 + b^2 = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie:
(a) Es gibt eine Matrix $P \in Gl(2, \mathbb{C})$ derart, dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.
(b) Mit dieser Matrix P ist ${}^{\star}PP$ eine Diagonalmatrix und man kann P so modifizieren, dass für das modifizierte ${}^{\star}P' = P'^{-1}$ gilt, wobei ${}^{\star}P = \overline{{}^{t}P}$.
(a) Es kann $b \neq 0$ angenommmen werden, da A für $b = 0$ schon Diagonalmatrix ist.
Zunächst sind die komplexen Eigenvektoren von A zu bestimmen, da die Matrix der zu A gehörenden linearen Abbildung L_A bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren eine Diagonalmatrix ist.
Das charakteristische Polynom von A ist:

$$\chi_A = det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ b & x-a \end{pmatrix} = (x - (a + bi))(x - (a - bi))$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = (a + bi)$ und $\lambda_2 = (a - bi)$.
Als Eigenvektoren hierzu ergeben sich z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ zu λ_1 und $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ zu λ_2.
Damit ist

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix.
(b) Es ist

$$^{\star}P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$^{\star}PP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Da $\frac{1}{2}{}^{\star}PP = (\frac{1}{\sqrt{2}}{}^{\star}P)(\frac{1}{\sqrt{2}}P) = E_2$ und ${}^{\star}(\frac{1}{\sqrt{2}}P) = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^{\star}P$ folgt $P' = \frac{1}{\sqrt{2}}P$.