Eine Lösung zu Aufgabe (20):

(a) Sei P_k^1 die Elementarmatrix, die von rechts multipliziert die erste und k-te Spalte vertauscht . Mit $A \in I$ ist auch $AP_k^1 \in I$. Daher gilt:

$$U = \left\{ u \in K^{n \times 1} : u \text{ ist die } \underline{\text{erste}} \text{ Spalte von einer Matrix aus } I \right\}$$

Da I insbesondere auch ein K-Untervektorraum von $K^{n \times n}$ ist, muss U ebenfalls ein K-Untervektorraum von $K^{n \times 1}$ sein.

(b) Seien $I \neq \{0\}$ und $(u_1, \ldots, u_r)$ eine Basis von U. Sei weiter $A \in I$. Für $1 \leq i \leq n$ gibt es $w_i' \in K^{r \times 1}$ derart, dass[1]

$$A_{\bullet i} = [u_1, \ldots, u_r] \cdot w_i',$$

denn $A_{\bullet i} \in U$. Damit ist dann aber auch

$$A_{\bullet i} = [u_1, \ldots, u_r, \quad \underbrace{0, \ldots, 0}_{\substack{n-r \\ \text{tritt evtl. nicht auf}}} \quad] \cdot w_i \ ,$$

wobei $w_i = \begin{bmatrix} w_i' \\ 0 \end{bmatrix}$ gesetzt wurde.

Insgesamt folgt also: $A = [u_1, \ldots, u_r, 0, \ldots, 0] \cdot [w_1, \ldots, w_n]$.

(c) Sei nun I ein Rechtsideal in $K^{n \times n}$.
Wenn $I = \{0\}$, dann ist $I = 0 \cdot K^{n \times n}$ ein Rechtshauptideal.
Wenn $I \neq \{0\}$, dann ist nach (b) mit $B := [u_1, \ldots, u_r, 0 \ldots, 0] \in K^{n \times n}$:

$$I \subseteq B \cdot K^{n \times n}.$$

Ist dabei $B \in I$, dann gilt auch

$$B \cdot K^{n \times n} \subseteq I$$

und es folgt insgesamt, dass $I = B \cdot K^{n \times n}$. Dann ist I also ein Rechtshauptideal.
Um zu zeigen, dass B in I liegt, kann man so vorgehen:
Für alle $u \in U$ sind (vgl. (a)) die Matrizen

$$[u, 0, \ldots, 0], [0, u, 0, \ldots, 0], \ldots, [0, \ldots, 0, u]$$

aus I. Insbesondere sind demnach

$$[u_1, 0, \ldots, 0], [0, u_2, 0, \ldots, 0], \cdots, [0, \ldots, u_r, 0, \ldots, 0]$$

alle aus I und somit auch ihre Summe B. $\square$

[1] $A_{\bullet i}$ ist die i-te Spalte von A.