Modul Algebra **13. Juni 2005**
Lineare Algebra 2 und Einführung in die Algebra
SoSe 2005
Schmale

Aufgabenblatt 10

(32) Lineare Substitution bei Matrixpolynomen.

Seien R ein kommutativer Ring, $A \in R^{n\times n}$, $M \in R[x]^{n\times n}$ und etwa $M = \sum_{i=0}^{d} M_i x^i$.

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$M = \sum_{i=0}^{d} \widetilde{M_i}(xE - A)^i$$

mit geeigneten $\widetilde{M_0}, \dots \widetilde{M_d}$ aus $R^{n\times n}$.

(b) $\widetilde{M_0}, \dots, \widetilde{M_d}$ sind eindeutig durch M bestimmt.

(c) Die Abbildung

$$\Phi: \ R[x]^{n\times n} \longrightarrow R[x]^{n\times n} \quad \text{mit} \quad \Phi(\sum_{i=0}^{d} M_i x^i) = \sum_{i=0}^{d} M_i (xE - A)^i$$

ist ein Ringautomorphismus.

(33) Erste Eigenschaften von Matrixlösungen einer Polynomgleichung.[1]
Seien K ein Körper und $f \in K[x] \setminus K$ mit $hK(f) = 1$. Zeigen Sie:

(a) Sei $A \in K^{n\times n}$ diagonalisierbar und sei $\sigma(A)$ die Menge der Eigenwerte von A. Dann gilt

$$f(A) = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall \lambda \in \sigma(A): \ f(\lambda) = 0$$

(b) Seien nun $d \geq 2$, $f = \sum_{i=0}^{d} f_i x^i$ und $f_d = 1$. Unabhängig von (a) gilt:
Wenn K nicht endlich ist, dann ist auch $\mathcal{N}_f = \{A \in K^{d\times d} : \ f(A) = 0\}$ nicht endlich.[2]

(c) Sei nun $f = x^2 + f_1\, x + f_0$. Für alle $A \in \mathcal{N}_f$ gibt es genau ein $B \in K^{2\times 2}$ derart, dass $f \cdot E = (xE - B)\,(xE - A)$.

(34) Smithform spezieller charakteristischer Matrizen.
Sei K ein Körper und sei $p \in K[x] \setminus K$ mit höchstem Koeffizienten 1. Bestimmen Sie die Smithform (höchste Koeffizienten 1) der charakteristischen Matrix

(a) von $C(p)$, der Begleitmatrix zu p.

(b) von $\mathrm{diag}(C(p), C(p))$

(c) von $\mathrm{diag}(C(p), C(p)) + E_{r+1,r}$. Dabei ist $r = \deg p$ und $E_{r+1,r}$ die $2r \times 2r$-Matrix, deren $(r+1, r)$-Eintrag 1 ist und alle übrigen 0.

....

[1] Mehr Material zu diesem Thema gibt es z.B. in dem Klassiker [Ga].

[2] Anleitung: $C(f) \in \mathcal{N}_f$ und ebenso $PC(f)P^{-1}$ für alle $P \in GL(d, K)$. Modifiziere $C(f)$ auf einfache Weise mit einem Parameter aus K.