Modul Algebra **20. Juni 2005**

Lineare Algebra 2 und Einführung in die Algebra

SoSe 2005

Schmale

Aufgabenblatt 11

(35) $\boldsymbol{A \approx {}^{t}A}$

(a) Zeigen Sie: Die Smithform einer Matrix M mit Einträgen aus einem euklidischen Ring stimmt mit der Smithform ihrer Transponierten ${}^{t}M$ überein.

(b) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um zu zeigen, dass eine quadratische Matrix mit Einträgen aus einem Körper ähnlich ist zu ihrer Transponierten.

(c) Bestimmen Sie $T \in Gl(3, \mathbb{Z}_2)$ so, dass mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ gilt: $TAT^{-1} = {}^{t}A$.

(d) Geben Sie eine 2×2-Matrix an, bei der alle Einträge 0 oder 1 sind und die nicht durch eine endliche Abfolge von Zeilen- und Spaltenvertauschungen in ihre Transponierte überführt werden kann.

(36) Seien

$$M := \begin{bmatrix} x & x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x & x+1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad N := \begin{bmatrix} x & x^2+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x & x+1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

M und N werden aufgefasst als Matrix aus $\mathbb{Z}_2[x]^{4\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{Z}_2^{4\times 4}$ derart, dass

$$M \sim (xE - A) \quad \text{und} \quad N \sim (xE - B) .$$

(b) Bestimmen Sie die Jacobson-Normalformen für A und B.

(c) Bestimmen Sie die Weierstraß-Normalform für A aufgefasst als Matrix über $\mathbb{F}_4$, am besten in der Schreibweise $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha+1\}$, wobei $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Entscheiden Sie selbst, wie Sie die normierten Primpolynome anordnen wollen.

(37) Begleitmatrizen und zyklische Moduln:

Sei K ein Körper und R ein kommutativer Ring

(a) Seien $A \in R^{n\times n}$ und $v \in R^{n\times 1}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion und mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton:

$$\langle\{A^k v : k \in \mathbb{N}\}\rangle_R = \langle\{A^k v :\ 0 \le k \le n-1\}\rangle_R$$

(b) Sei $p \in R[x]\backslash R$ ein Polynom mit höchstem Koeffizienten 1. Seien weiter $d = \deg p$ und $C \in R^{d\times d}$ die Begleitmatrix zum Polynom p. Zeigen Sie: Es gibt ein $v \in R^{d\times 1}$ derart, dass $R^{d\times 1} = \langle\{C^k v :\ k \in \mathbb{N}\}\rangle_R$. Man sagt dann auch: $R^{d\times 1}$ ist C-zyklisch.

(c) Zeigen Sie: Wenn es zu $A \in K^{n\times n}$ einen Vektor $v \in K^{n\times 1}$ gibt, derart, dass

$$K^{n\times 1} = \langle\{A^k v :\ k \in \mathbb{N}\}\rangle_K ,$$

dann ist $\mu_A = \varphi_A$.