Modul Algebra **27. Juni 2005**
Lineare Algebra 2 und Einführung in die Algebra
SoSe 2005
Schmale

Aufgabenblatt 12

Zwei zusätzliche Aufgaben:

(38) Zeilen- und Spaltenmodul über einem euklidischen Ring

Seien R ein euklidischer Ring, $M \in R^{m\times n}$, etwa $M = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = [w_1, \ldots, w_n]$ und wie in der linearen Algebra über Körpern

$$\mathsf{ZR}_R(M) := \langle v_1, \ldots, v_m \rangle_R = \{R\text{-Linearkombinationen der Zeilen } v_1, \ldots, v_m\} \subseteq R^{1\times n}$$
$$\mathsf{SR}_R(M) := \langle w_1, \ldots, w_n \rangle_R = \{R\text{-Linearkombinationen der Spalten } w_1, \ldots, w_n\} \subseteq R^{n\times 1}.$$

(a) Zeigen Sie (i.W. Wiederholung aus der linearen Algebra): Elementare Zeilenumformungen an M ändern den Zeilenmodul von M nicht.
Eine analoge Aussage trifft für den Spaltenmodul von M zu und kann im folgenden bei Bedarf ohne Beweis benutzt werden.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe geeigneter Ergebnisse aus der Vorlesung:

$$\mathsf{dim}_R \mathsf{ZR}_R(M) = \mathsf{dim}_R \mathsf{SR}_R(M)$$

(39) Sei R ein Hauptidealring und seien $a, b, a_k \in R$ für $k \geq 1$. Zeigen Sie
(a) $aR = bR \Leftrightarrow a \sim b$
(b) $aR \subseteq bR \Leftrightarrow b|a$
(c) Wenn $a_k R \subseteq a_{k+1} R$ für $k \geq 1$, dann gibt es ein $k^\star \geq 1$ derart dass $a_k R = a_{k^\star} R$ für $k \geq k^\star$.

Die Eigenschaft (c) besagt, dass aufsteigende Ketten von Idealen in einem Hauptidealring konstant werden müssen. Man sagt dann auch R ist **Noethersch**.[1]

Aufgaben für diese Woche:

(40) Summe und Schnitt von Gittern.

In $\mathbb{Z}^2$ seien gegeben: $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 24 \end{bmatrix}$, $w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $U = \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$.

(a) Bestimmen Sie v_1, v_2 so, dass $U + W = \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$,

und zeigen Sie:

(b) Mit $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 36 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$ ist $\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{Z}} = U \cap W$.
(c) Die Untermoduln $U, W, U + W, U \cap W$ sind paarweise verschieden.
(d) $U, W, U + W, U \cap W$ haben die $\mathbb{Z}$-Dimension 2. Vergleichen Sie Letzteres mit Satz III,13.3.

b.w.

(41) Maximales ganzzahliges Gitter in einem Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{n\times 1}$.
Der Untervektorraum U in $\mathbb{Q}^{4\times 1}$ werde aufgespannt von den Spalten der Matrix

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 14 & 32 & 26 \\ -4 & 3 & 8 \\ -4 & -17 & -16 \end{bmatrix}$$

(a) Zeigen Sie: $\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \in \big(U \cap \mathbb{Z}^{4\times 1}\big) \setminus \mathsf{SR}_{\mathbb{Z}}(L)$.

(b) Bestimmen Sie eine $\mathbb{Z}$-Basis von $U \cap \mathbb{Z}^{4\times 1}$.

(42) Anwendung der Unzerlegbarkeitskriterien.
Klären Sie, ob die folgenden Polynome unzerlegbar sind, und geben Sie jeweils genau an, wie Sie vorgegangen sind.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & x^5 + 3x^2 + 6x + 3 \\ \text{(b)} & 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \\ \text{(c)} & x^4 + x^3 + x^2 + 6x + 11 \end{array}\right\} \text{ in } \mathbb{Q}[x]$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(d)} & x^2y^3 + 6xy^3 + 9y^3 - y^2 + x^2y + 5xy + 6y - x - 7 \\ \text{(e)} & x^4 + y^2x^3 + (y+1)x^2 + 1 \end{array}\right\} \text{ in } \mathbb{Q}[x,y]$$

(f) $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$ in $\mathbb{F}_4[y]$

[1] Emmy Noether, 1882-1935