Modul Algebra **4. Juli 2005**

Lineare Algebra 2 und Einführung in die Algebra

SoSe 2005

Schmale

Aufgabenblatt 13

(43) In einem faktoriellen Ring sind unzerlegbare Elemente prim und es existieren ggT und kgV. Beweisen Sie Beobachtung 3 in §1 Teil C.

(44) In dieser Aufgabe wird der in der Vorlesung nur skizzierte **Beweis von Satz 8 in Teil C, §2** ausgeführt.

(a) Beweisen Sie Teil (a) dieses Satzes.

(b) Zeigen Sie:
Ist $\Phi : S \to T$ ein Ringisomorphismus, dann auch die Umkehrabbildung Φ^{-1}.

(c) Seien R ein kommutativer Ring, $R[y]$ Polynomring und $a \in R$. Zeigen Sie:
Der Einsetzungsmorphismus $\pi_{y+a} :\ R[y] \longrightarrow R[y]$ ist ein Isomorphismus und es gilt $\pi_{y+a}^{-1} = \pi_{y-a}$
(... z. B. indem Sie zuerst zeigen: $\pi_{y+a} \circ \pi_{y-a} = id_{R[y]} = \pi_{y-a} \circ \pi_{y+a}$.)

(45) Zeigen Sie: Die Eigenschaft (c) aus Aufgabe (39) trifft auch in einem faktoriellen Ring zu. M.a.W.: **Die Menge der Hauptideale in einem faktoriellen Ring ist Noethersch.**

(46) Ein kleines Projekt. Sei $V := (K[x])_{n,\, x^n-1}$. Betrachtet wird die Abbildung $\prod_w : K[x] \to K^n$ mit $\prod_w(f) = (f(1),\, f(w), \ldots, f(w^{n-1}))$ für $f \in K[x]$.
Die Einschränkung $\Delta_w := \pi\ |_V$ von $\prod_w$ auf V heißt **diskrete Fouriertransformation (DFT)**[1]**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Der Körper K enthalte eine sogenannte **primitive n-te Einheitswurzel** w. Das heißt nichts anderes als dass es in $G(K) = K\backslash\{0\}$ ein Element w gibt, dessen Ordnung genau n ist. Bekanntestes Beispiel ist $K = \mathbb{C},\ w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.
In dieser Aufgabe können einige für die DFT grundlegende Eigenschaften hergeleitet werden. Zeigen Sie:

(a) $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1) = \prod\limits_{i=0}^{n-1}(x - w^i)$

(b) char $K \nmid n$
$[(x^{\frac{n}{p}} - 1)^p = ?$ falls $p = \text{char } K$ und $p \mid n$, Nullstellenanzahl?$]$

(c) $\sum\limits_{j=0}^{n-1} w^{kj} = 0$ für $1 \leq k \leq n-1$

(d) Δ_w ist ein K-linearer Ringisomorphismus, wenn im K-Vektorraum K^n komponentenweise multipliziert wird.

(e) Sei D_w die Matrix von Δ_w bezüglich der kanonischen Basen in V und K^n. Bestimmen Sie D_w und bestätigen Sie die Invertierbarkeit.

(f) $D_w \cdot D_{w^{-1}} = n \cdot E_n$ mit der $n \times n$ Einheitsmatrix E_n.

(g) Was besagt (f) für die Berechnung von Δ_w^{-1}?

(h) Lesen Sie mehr zur "FFT" in dem in der Fußnote genannten Lehrbuch.

....

[1]Wenn $R = \mathbb{C}$ und $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ entsteht die diskrete Fouriertransformation bei Abtastvorgängen kontinuierlicher Signale. Gute Algorithmen zur schnellen Berechnung der diskreten Fouriertransformation (FFT, F für 'fast') gehören zu den praktisch bedeutsamsten Algorithmen überhaupt, siehe etwa: von zur Gathen und Gerhard, Moderne Computer Algebra, Cambrigde University Press, 2. Auflage, 2003. Die Aufgabe ist größtenteils orientiert an diesem Buch.