Modul Algebra **18. April 2005**

Lineare Algebra 2 und Einführung in die Algebra

SoSe 2005

Schmale

Aufgabenblatt 2

(4) Beweisen Sie

(a) Satz 2.10

und

(b) $\forall P \in \mathcal{O}(n): \ P\mathcal{O}_1(n)P^{-1} = \mathcal{O}_1(n)$.

Die Eigenschaft (b) besagt, dass die Untergruppe $\mathcal{O}_1(n)$ ein sogenannter *Normalteiler* in der Gruppe $\mathcal{O}(n)$ ist.

(5) **Househoulder-Matrizen.**[1] Sei $w \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ und gelte ${}^{\mathsf{t}}w \cdot w = 1$. Weiter sei $W = w^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \ {}^{\mathsf{t}}v \cdot w = 0\}$, $H := E_n - 2\, w \cdot {}^{\mathsf{t}}w$ und $L_H : \ \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$ die durch H induzierte lineare Abbildung. H heißt *Householder-Matrix* zum Vektor w.

Zeigen Sie:

(a) L_H ist Spiegelung an der Hyperebene W (vgl. Aufgabe (3)).

(b) ${}^{\mathsf{t}}H = H$ und $H^2 = E_n$.

(c) Seien $x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ zwei Vektoren der Länge 1 und $x \neq y$. Bestimmen Sie einen Vektor der Länge 1 derart, dass mit der zugehörigen Housholder-Matrix H gilt: $Hx = y$.

(6) (a) Eine **Anwendung von Aufgabe (4).** Seien $n \geq 2$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die erste Spalte von A sei außerdem $\neq 0$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion nach n und ähnlich (aber kürzer) wie beim Beweis von Satz 2.17:

Es gibt ein Produkt Q von höchstens $n-1$ Householder-Matrizen derart, dass QA in Zeilenstufenform ist.

(b) Eine weitere Anwendung: Seien $n \geq 3$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gibt ein Produkt Q von höchstens $n-2$ Householder-Matrizen derart, dass für $M = QAQ^{-1} = (m_{ij})$ gilt:

(i) $m_{ij} = 0$, für $1 \leq i, j \leq n$ und $i > j+1$

(ii) $m_{i+1,i} \in \{0, 1\}$ für $1 \leq i \leq n-2$.

Matrizen, die der Bedingung (b)(i) genügen, heißen *Hessenberg-Matrizen*[2].

Die Bedeutung der Housholder-Matrizen liegt u.A. darin, dass Sie in vielen Fällen numerisch stabile und längentreue (!) Basiswechsel ermöglichen. Dies ist z.B. der Eigenvektorberechnung vorzuziehen, da dann zuerst Eigenwerte berechnet werden müssen, was i.A. sehr aufwendig und fehlerträchtig ist. Wie es sich in Aufgabe (5)(b) zeigt, stößt man in diesem Kontext auf Hessenberg-Matrizen. Mehr Informationen dazu z.B. in dem Buch *Matrices: Theory and Applications*, Springer Verlag, 2002 von Dennis Serre ([Se],insbesondere ab S. 169).

....

[1] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Householder.html

[2] http://mathworld.wolfram.com/HessenbergDecomposition.html

Lebensdaten mit Bild von Hessenberg z.B. bei: http://page.mi.fu-berlin.de/~begehr/buch/mathematicians.html