

Aufgabenblatt 3

(7)

(a) Sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Bestimmen Sie die kürzeste Lösung der Aufgabe

$$\| Ax - b \| = \text{Min!}$$

(b) Bestimmen Sie für $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ \frac{14}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{19}{5} & \frac{-8}{5} \end{bmatrix}$ eine Singulärwertzerlegung (P, Q, s_1, \dots, s_r) .

(8) Zeigen Sie, dass die zur Matrix $A = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ 4 & -3 & -12 \\ 12 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ gehörende lineare Abbildung L_A eine Drehung¹ ist und bestimmen Sie Drehachse und Drehwinkel.

(9) Zeigen Sie:

(a) Jede Matrix $A \in \mathcal{O}_1(3)$ lässt sich darstellen als Produkt $A = \Delta_3 \Delta_2 \Delta_1$, von drei elementaren Drehungen um die drei Koordinatenachsen, wobei $\Delta_3 = D(1, 2, a_3, b_3)$, $\Delta_2 = D(1, 3, a_2, b_2)$, $\Delta_1 = D(2, 3, a_1, b_1)$ mit geeigneten $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Die zugehörigen Drehwinkel heißen **Cardano²-Winkel**, häufig auch **Cardan-Winkel** vermutlich nach der französischen Namensform Jérôme Cardan.

(b) Jede Matrix $A \in \mathcal{O}_1(3)$ lässt sich darstellen als Produkt $A = \Delta_3 \Delta_1 \Delta'_3$, von drei elementaren Drehungen um nur zwei Koordinatenachsen, wobei $\Delta_3 = D(1, 2, a_3, b_3)$, $\Delta_1 = D(2, 3, a_1, b_1)$, $\Delta'_3 = D(2, 3, a'_3, b'_3)$ mit geeigneten $a_1, a_3, a'_3, b_1, b_3, b'_3$. Die zugehörigen Drehwinkel heißen **Euler³-Winkel⁴**.

Anleitung, (a): Finde elementare Drehungen Q_3, Q_1 um die dritte und erste Koordinaten-

achse, damit $Q_3 A Q_1 = \begin{bmatrix} * & \alpha & * \\ 0 & \beta & 0 \\ * & \gamma & * \end{bmatrix}$ und $\beta > 0$. Warum muss nun $\beta = 1, \alpha = \gamma = 0$ gelten?

(b): Finde elementare Drehungen Q_3, Q'_3 um die dritte Koordinatenachse, damit $Q_3 A Q'_3 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & * & * \\ \gamma & * & * \end{bmatrix}$ und $\alpha > 0$. Warum muss diesmal $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ gelten?

.....

¹D.h., dass bezüglich einer geeigneten orthonormalen Basis die Matrix von L_A eine elementare Drehmatrix ist.

²Geronimo oder auch Girolamo Cardano, 1501-1576.

³Leonhard Euler, 1707-1783.

⁴Leider ist die Zuordnung der Namen zur Winkelauswahl in der Literatur nicht eindeutig. Euler- und Cardano-Winkel werden in vielen Bereichen benutzt zur Positions/Bewegungs-Beschreibung bei Bewegungen z.B. von Satelliten, Maschinenteilen, Prothesenteilen, und in virtuellen Bewegungsrealitäten. Bei Winkelbereichen über ca. 42 Grad kommen anscheinend Quaternionen zur Anwendung.