Modul Algebra **18. Mai 2005**

Lineare Algebra 2 und Einführung in die Algebra

SoSe 2005

Schmale

Aufgabenblatt 6

(18) Fortsetzung von ϱ_d auf $\mathbb{R}$. Sei $d \in \mathbb{N}_+$.

(a) Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $s \in \mathbb{Z}$ und genau ein $r \in [0\ ,\ d)$ derart, dass $z = sd + r$. Dabei gilt $r = z - \lfloor \frac{z}{d} \rfloor d$. ($\lfloor x \rfloor$:=größte ganze Zahl $\leq x$)

(b) Zu $z \in \mathbb{R}$ sei $\varrho_d(z) = z - \lfloor \frac{z}{d} \rfloor d$. Die Aussagen (a) bis (d) von Satz 2.3 gelten entsprechend. Beweisen Sie davon (b) für $z \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{Z}$, (c) und (d) für $z, z' \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass (e) nicht für alle $z, z' \in \mathbb{R}$ gilt.

(19) $\mathbb{Z}_6$ auf dem Einheitskreis. Die Abbildung $\phi:\ \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei gegeben durch die Vorschrift: $\phi(z) = a^z$ mit $a = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ und für $z \in \mathbb{Z}$.

(a) Bestimmen Sie $S := \mathsf{Bild}\,\phi$ und machen Sie eine Skizze von S.

(b) Bestimmen Sie $\phi^{-1}(1)$

(c) Legen Sie in S Verknüpfungen $\boxplus, \boxdot$ fest derart, dass S ein kommutativer Ring wird und ϕ ein Ringmorphismus wird. Weisen Sie dabei exemplarisch nur die Existenz eines 0-Elementes und eines 1-Elementes und ein Distributivgesetz nach.

Anleitung zu (a),(b),(d): $a^{s\cdot 6+r} = a^r$; Division mit Rest.
Bemerkung: Auch hier ergibt sich mit Hilfe von Satz 1.23 die Ringisomorphie $S \cong \mathbb{Z}_6$.

(20) Zu einem **Rechtsideal $I \subseteq K^{n\times n}$** sei

$$U := \{u \in K^{n\times 1} :\ u \text{ ist Spalte einer Matrix aus } I\}\ .$$

(a) Weisen Sie nach, dass U ein Untervektorraum ist.

(b) Falls $I \neq 0$, sei $(u_1, \ldots, u_r)$ eine Basis von U und $A \in I$. Zeigen Sie: Es gibt $w_1, \ldots, w_n \in K^{n\times 1}$ derart,dass

$$A = \big[u_1, \ldots u_r, 0 \ldots, 0\big] \cdot \big[w_1, \ldots, w_n\big]\ .$$

(c) Beweisen Sie Satz 5.3 für „Rechts“.