

Aufgabenblatt 7

- (21) Konstruieren Sie ähnlich wie in den Beispielen der Vorlesung einen **Körper L mit 9 Elementen**.

Wie viele Wahlmöglichkeiten gibt es bei dieser Konstruktion ?

Sei q das von Ihnen benutzte Primpolynom aus $\mathbb{Z}_3[x]$. Berechnen Sie $q(x^9 - x)$.

Erstellen Sie eine Tabelle für die Multiplikation in L .

Wie viele Nullstellen hat das Polynom $x^9 - x$ in L ?

Suchen Sie ein Element $\beta \in L$ mit der Eigenschaft $L = \{0\} \cup \{\beta^k : k \in \mathbb{N}\}$.

- (22) **Matrix-Modell für \mathbb{F}_4** . Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ und $L := \langle E_2, A \rangle_{\mathbb{Z}_2}$.

(a) L ist Unterring von $\mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ und es ist $|L| = 4$:

(b) L ist ein Körper und es gilt $B^4 = B$ für alle $B \in L$.

(c) Sei $\pi_A : \mathbb{Z}_2[x] \rightarrow L$ der durch Einsetzen von A entstehende Ringhomomorphismus und sei q das charakteristische Polynom von A . Zeigen Sie: Kern $\pi_A = q\mathbb{Z}_2[x]$

(d) Vergleichen Sie L und den Körper $(\mathbb{Z}_2[x])_{2, x^2+x+1}$ mit Hilfe von Satz 1.23.

- (23) **Im Allgemeinen folgt aus "unzerlegbar" nicht "prim"**.

Sei $R = \{f \in \mathbb{Q}[x] : f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}\}^1$. Für $k \in \mathbb{N}_+$ sei $\binom{x}{k} := \prod_{i=0}^{k-1} \frac{x-i}{i+1}$.

Für $k = 0$ bedeutet dies $\binom{x}{0} = 1$.

Zeigen Sie:

(a) R ist ein Unterring von $\mathbb{Q}[x]$ und $G(R) = G(\mathbb{Z})$.

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $\binom{x}{k} \in R$.

(c) Die linearen Polynome aus R haben ganze Koeffizienten.

(d) $\binom{x}{2}$ ist in R unzerlegbar.

(e) $\binom{x}{2}$ ist kein Primelement in R .

(f) Zusatz für Wissbegierige:

$$R = \langle \left\{ \binom{x}{k} : k \geq 0 \right\} \rangle_{\mathbb{Z}} .$$

¹Eine oft benutzte Bezeichnung für den Ring R ist $\text{Int}(\mathbb{Z})$.

Ringe dieses Typs werden ausführlich behandelt in dem Buch
"Integer-valued Polynomials" von Paul-Jean Cahen und Jean-Luc Chabert,
American Mathematical Society, 1997.