Modul Algebra **6. Juni 2005**

Lineare Algebra 2 und Einführung in die Algebra

SoSe 2005

Schmale

Aufgabenblatt 9

Zwei zusätzliche Aufgaben zu Kapitel I in Teil B der Vorlesung:

(27) Sei $K = \mathbb{Z}_3[x]_{2,x^2+1}$. Zeigen Sie:

In $K[t]$ sind alle Polynome vom Grad 2 aus $\mathbb{Z}_3[t]$ zerlegbar.

(28) Beweisen Sie Satz 1.18 (b) im Skript zu Teil B auf Seite 13 für einen kommutativen Ring[1].

Aufgaben für diese Woche:

(29) Sei R ein kommutativer Ring und seien $A \in R^{n\times n}, P \in GL(n,R)$. Zeigen Sie: $R[A] \cong R[PAP^{-1}]$. [2]

(30) Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie ohne Eigenschaften der Determinante zu benutzen, dass eine invertierbare obere Dreiecksmatrix nur Einheiten in der Diagonalen stehen hat.

(31) Bezout-Identität und lineares Gleichungssystem.

(a) In $\mathbb{Z}_2[x]$ seien $f_1 = x^5 + x^3 + x^2 + 1, f_2 = x^5 + x^4 + x + 1, f_3 = x^5 + 1$. Bestimmen Sie den größten (normierten) gemeinsamen Teiler g von f_1, f_2, f_3 und Polynome h_1, h_2, h_3 aus $\mathbb{Z}_2[x]$ derart, dass $f_1h_1 + f_2h_2 + f_3h_3 = g$.

(b) Gegeben sei die die folgende Matrix A aus $\mathbb{Z}^{3\times 4}$:

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 6 & -21 & -24 \\ 5 & -4 & 11 & 12 \\ 22 & 8 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie Matrizen $P \in GL(3,\mathbb{Z})$ und $Q \in GL(4,\mathbb{Z})$ derart,dass PAQ in (positiver) Smith-Form ist.

(ii) Bestimmen Sie die Menge aller $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 1}$, für die das lineare Gleichungssystem „$Ax = b$“ eine ganzzahlige Lösung besitzt.

....

[1] Für einen beliebigen Ring ist der Nachweis aber auch nicht schwieriger, sondern allenfalls etwas ungewohnter.

[2] Vgl. Satz 3.17 im Skript zu Teil B auf Seite 25.
Zeigen Sie u.A., dass die Abbildung $\kappa_P: R^{n\times n} \longrightarrow R^{n\times n}, A \mapsto PAP^{-1}$ ein Ringautomorphismus ist.