Modul Geometrie Stand: 22. November 2009
Wintersemester 2008-2009
Schmale

Skizzierte Liste zum Inhalt der Vorlesung.
Es fehlen Beweise, weitere Beispiele und viele Bemerkungen.
Ggf. Fehler bitte mitteilen : `wiland.schmale@uni-oldenburg.de`

Kapitel 1: Analytische affine Geometrie.

§ 1 Allgemeine affine Räume (AR-e) und affine Unterräume (aUR-e).

Satz 1. Charakterisierung affiner Unterräume eines Vektorraumes. Seien V K-VR, $\mathsf{dim}_K V = n < \infty$, Γ eine nicht leere Teilmenge von V und $\mathbf{Char}\boldsymbol{K} \neq \mathbf{2}$. Äquivalent sind:
(a) Γ ist aUR,
(b) Γ ist Faser eines Endomorphismus, d.h.: Γ ist Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems,
(c) Γ ist „abgeschlossen gegenüber dem Bilden von Verbindungsgraden“,
d.h.: für je zwei verschiedene Punkte in Γ ist die Verbindungsgraden $p \vee q$ ganz in Γ enthalten. Dabei ist $p \vee q = p + \langle q-p \rangle_K$ (allgemeinere Definition von $\vee$ folgt).
Die Voraussetzung über die Charakteristik wird nur bei der Implikation $(c) \Rightarrow (a)$ benötigt. Es reicht, stattdessen auch vorauszusetzen, dass K mindestens drei Elemente enthält, dann muss der Beweis aber anders geführt werden.
Definition 2. Allgemeiner affiner Raum. $X \neq \varnothing$, U K-VR, $\varphi : X \times X \to U$ Abbildung. (X, U, φ), oder kurz: X, heißt affiner Raum (aR), wenn gilt

(A1) $\underset{p \in X}{\forall}$ $\varphi(p, \bullet)$ bijektiv

(A2) $\underset{p,q,r \in X}{\forall}$ $\varphi(p,q) = \varphi(p,r) + \varphi(r,q)$ (Dreiecksregel/Kräftesumme)

Auch die leere Menge wird als aR bezeichnet. $p \in X$ heißt oft Punkt und $\varphi(p,q)$ Verbindungs- oder Verschiebungsvektor.

$$\text{Schreibweise:} \quad \varphi(p,q) = \overrightarrow{pq}$$

Erste Regeln: $\overrightarrow{pp} = 0$, $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$, $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs} \Leftrightarrow \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$.
Translation: $\boldsymbol{T_u} : X \to X, p \mapsto T_u(p) = \big(\varphi(p, \bullet)\big)^{-1}(u)$. Translationen sind bijektiv und es gilt $T_u \circ T_{u'} = T_{u+u'}$.
Die **Dimension $\mathsf{dim}_{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{X}$** des aR-s X ist $\mathsf{dim}_K U$.
Beispiel 3. affine Unterräume der linearen Algebra: „$v + U$“
Definition 4. aUR
Bezeichnung $\overrightarrow{Y} = \varphi(z, \bullet)(Y)$ (unabhängig von z!)
Durchschnitt aUR-e ist aUR. Die **affine Hülle $\overline{\boldsymbol{M}}^{\boldsymbol{aff}}$** eine Punktmenge M ist $\overline{M}^{aff} = \bigcap\limits_{\substack{Y aUR \\ M \subseteq Y}} Y$.

Satz 5. explizite Darstellung der affinen Hülle. Für $p \in M$ ist $\overline{M}^{aff} = \varphi(p, \bullet)^{-1}(W)$ mit $W = \langle \{\overrightarrow{pa} : \ a \in M\} \rangle_K$.
Definition 6. affine Erzeugung, affine Unabhängigkeit, affine Basis.
Beispiele.
Satz 7. Charakterisierung affiner Basen. Äquivalent sind:
(a) M affine Basis von Y
(b) $\underset{p \in M}{\forall} : \varphi(p, \bullet)\big(M \setminus \{p\}\big)$ Basis von $\overrightarrow{Y}$.
(c) für **ein** $p \in M$ ist $\varphi(p, \bullet)\big(M \setminus \{p\}\big)$ Basis von $\overrightarrow{Y}$.
Beispiel 8. klassischer Fall: $Y = K^n$ ausführlich.
Satz 9. Y aUR von X, $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)} \in Y$. Dann sind äquivalent:
(a) $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ affine Basis von Y
(b) $\overrightarrow{a^{(0)}a^{(1)}}, \ldots, \overrightarrow{a^{(0)}a^{(r)}}$ Basis von $\overrightarrow{Y}$

Definition 10. $\mathsf{dim}_K(Y) := \mathsf{dim}_K\overrightarrow{Y}$.
Satz 11. Paralleleneigenschaft in aR-en. Y aUR von X, $\mathsf{dim}_K(Y) = \mathsf{dim}_K(X) - 1$ (Y Hyperebene), $x \in X\backslash Y$. Dann gibt es genau einen aUR Y' von X derart, dass $x \in Y'$, $\mathsf{dim}_K Y' = \mathsf{dim}_K Y$ und $Y \cap Y' = \varnothing$. Verweis auf unsere Definition von „ $\|$“ in Aufgabe (9).
Bemerkungen zur Rolle des so genannten Parallelenaxioms in der Geschichte der Geometrie. Wichtig für uns: In der analytischen affinen Geometrie - das ist das, was wir grade betreiben - zeigt Satz 11, dass insbesondere in einer Ebene das Parallelenaxiom(= Aussage von Satz 11) selbstverständlich gilt. Hinweis auf Anfangsteil des Linhart-Skripts und des Textes von Waismann.
affine Koordinaten, Affinkombinationen
Satz 12. Grundlage für baryzentrische Koordinaten. (X, U, φ) aR über K, Y aUR, $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ affine Basis von Y, $r \geq 2$.
(a) Sei $p \in Y$. Es gibt genau einen Vektor von Skalaren $(\lambda_0, \dots, \lambda_r) \in K^{r+1}$ derart, dass

$$\sum_{i=0}^{r} \overrightarrow{p\, a^{(i)}} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=o}^{r} \lambda_i = 1\ .$$

(b) Wenn $p \in X$, $\sum_{i=}^{r} \lambda_i = 1$ und $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{p\, a^{(i)}} = 0$, dann ist $p \in Y$.
Satz 13. aUR-e eines K-VR-s als Menge spezieller Linearkombinationen. Y aUR eines K-VR-s, $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ affine Basis von Y. Dann ist

$$Y = \Big\{ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i a^{(i)} : \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1, \lambda_i \in K \Big\}$$

Definition 14. Affinkombinationen
Satz 15. $M \subseteq V$ Teilmenge eines K-VR-s.
(a) M aUR $\Leftrightarrow$ M enthält mit je endlich vielen Punkten auch alle deren Affinkombinationen.
(b) $\overline{M}_{\mathsf{aff}} = \{$ Affinkombinationen von Punkten aus $M\}$.

§ 2 Affine Abbildungen und ihre Invarianten.

Rückzug auf aUR-e von K^n, K ein Körper. Dabei ist stets $\overrightarrow{pq} = q - p$ für $p, q \in K^n$.
Allgemeinere, aber bis auf Isomorphie doch gleiche Situation, siehe Fischer,analytische Geometrie oder das Standardwerk von Marcel Berger.
Definition 1. Affine Abbildung. Y, Y' aUR-e von K^n. $f : Y \to Y'$ heißt affin, wenn gilt:

$$\underset{\substack{\ell : \overrightarrow{Y} \to \overrightarrow{Y'} \\ \text{linear}}}{\exists} \ell \quad \underset{p,q \in Y}{\forall} : \quad \overrightarrow{f(p)f(q)} = \ell(\overrightarrow{p\,q}) \quad \big(= f(q) - f(p) =^{(1)} \ell(q) - \ell(p) \big)\ .$$

Satz 2. Erste Eigenschaften Y, Y' aUR-e, $f : Y \to Y'$ Abbildung.
(a) $f : Y \to Y'$ affin
(b) $\underset{\substack{\ell : \overrightarrow{Y} \to \overrightarrow{Y'} \\ \text{linear}}}{\exists} \ell \quad \underset{p^* \in Y}{\exists} p^* \quad \underset{q \in Y}{\forall} q \qquad f(q) - f(p^*) + \ell(q - p^*)$
(c) ℓ ist durch die affine Abbildung eindeutig bestimmt (und heißt **zu f gehörige lineare Abbildung**).
(d) Zu jeder linearen Abbildung $\ell : \overrightarrow{Y} \to \overrightarrow{Y'}$ und jedem $p^* \in Y$ und $p^{*\prime} \in Y'$ ist durch

$$f(q) :== p^{*\prime} + \ell(q - p^*) \text{ für } q \in Y$$

eine affine Abbildung gegeben.
(e) Die Hintereinanderausführung affiner Abbildungen ist affin.
(f) $Y = a + U, f : Y \to Y'$ affin mit ℓ als zugehöriger linearer Abbildung.
Dann ist $f(Y) = f(a) + \ell(U)$ $(\subseteq Y')$.
Beispiel 3.
(a) **Lineare Abbildungen**
(b) **Einschränkung affiner Abbildungen** auf aUR-e.
(c) **Translationen**. Zugehörige lineare Abbildung ist Identität.
(d) **Dilatationen**: $\alpha \in K, p, p' \in Y, f : Y \to Y$ mit $f(q) = p' + \alpha(q - p)$. Insbesondere ist dabei $f(p) = p'$. Wenn $p' = p$, heißt f dabei (reine) Streckung mit Zentrum p. Wenn $\alpha \neq 0$, heißt f echte Dilatation oder ggf. Streckung.

....

(1) falls ℓ auf ganz K^n erklärt ist!

(e) **(Parallel)-Projektion** eines aUR-s Y entlang oder parallel zu einer Richtung W (UVR von K^n) in einen aUR $Y' = a + U$. Voraussetzung: $U \oplus W = K^n$. Sei $\ell : K^n \to K^n$ die Projektion entlang W auf U (also $\ell(u + w) = u, u \in U, w \in W$). Dann wird für $q \in Y$ festgelegt: $f(q) := a + \ell(q)$.

(f) **Spiegelung** an einem UVR. Spezialfall von (a). Verallgemeinerung für aUR-e als Übung.

In der Vorlesung verteilte Textseite:

Nach den Beispielen (Beispiel 3 in § 2) folgt nun der Beweis von Satz 2 in § 2:

(a) Zu zeigen ist, dass der Bezug auf einen fest gewählten Punkt ausreicht bei der Definition einer affinen Abbildung. Wir legen also einen Punkt p^* aus Y fest und nehmen an, dass dann für alle $q \in Y$ gilt: $f(q) = f(p^*) + \ell(q - p^*)$. Für einen weiteren Punkt p aus Y ergibt sich dann $f(p) = f(p^*) + \ell(p - p^*)$ und damit wegen der Linearität von ℓ

$$f(q) - f(p) = \ell(q - p^*) - \ell(p - p^*) = \ell(q - p),$$

genau so, wie es in der Definition 1 gefordert wird.

(b) Mit einer weiteren linearen Abbildung ℓ' müsste für alle p, q aus Y gelten

$$\ell'(q - p) = \ell(q - p) \ ,$$

weswegen sich zwangsläufig $\ell' = \ell$ auf $\overrightarrow{Y}$ ergibt.

(c) f ist genau so definiert, wie es Definition 1 fordert.

(d) Seien $f : Y \to Y', f' : Y' \to Y''$ affine Abbildungen mit zugehörigen linearen Abbildungen ℓ und ℓ'. Für alle $p, q \in Y$ gilt dann

$$\begin{aligned}(f' \circ f)(q) - (f' \circ f)(p) &= f'(f(q)) - f'(f(p)) \\ &= f'\big(\underbrace{f(p) + \ell(q-p)}_{=q'}\big) - f'(\underbrace{f(p)}_{=p'}) \\ &= \ell'(q' - p') \\ &= \ell'\big(\ell(q-p)\big) \\ &= \big(\ell' \circ \ell\big)(q - p) \ .\end{aligned}$$

$f' \circ f$ ist demnach eine affine Abbildung mit $\ell' \circ \ell$ als zugehöriger linearer Abbildung.

(e) Für $a + u \in a + U$ ergibt sich mit der affinen Abbildung f

$$f(a + u) = f(a) + \ell\big((a + u) - a\big) = f(a) + \ell(u) \ .$$

Damit kann die Behauptung leicht nachgewiesen werden. □

Es folgen weitere grundlegende Eigenschaften affiner Abbildungen.

Satz 4. Sei $f : Y \to Y'$ eine affine Abbildung und ℓ die dazu gehörende lineare Abbildung.

(a) f injektiv $\Longleftrightarrow$ ℓ injektiv

(b) f surjektiv $\Longleftrightarrow$ ℓ surjektiv

(c) f bijektiv $\Longrightarrow$ f^{-1} affin

(d) $\big[\ y \in Y, y' \in Y$ und $f(y) = y'\ \big] \Longrightarrow f^{-1}(y') = y + \mathsf{Kern}\ \ell$

(e) Ist Z ein affiner Unterraum von Y und Z' ein affiner Unterraum von Y', dann ist $f(Z)$ ein affiner Unterraum von Y' und $f^{-1}(Z')$ ein affiner Unterraum von Y. Insbesondere gilt für alle $p, q \in Y$: $f(p \vee q) = f(p) \vee f(q)$ (vgl. unten Def. 5). Außerdem ist $\mathsf{dim}\ f(Z) \leq \mathsf{dim}\ Z$.

Die Beweise sind kleine ergänzende Übungen zu den Anfängen der linearen Algebra. □

Bisher stand die algebraische Definition affiner Abbildungen im Mittelpunkt. Das folgende in der Literatur meist als **Hauptsatz der affinen Geometrie** bezeichnete Ergebnis von Satz 6 gibt uns eine geometrische Charakterisierung gewisser affiner Abbildungen als Kollineationen.

Definiton 5. Sei X ein affiner Raum. Eine **Kollineation** ist eine bijektive Abbildung $f : X \to X$ mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\underset{p,q \in X}{\forall} : \quad f(p \vee q) = f(p) \vee f(q)$$

Satz 6. Ist X ein mindestens zweidimensionaler affiner Raum über einem Körper K, der nur einen einzigen Automorphismus zulässt und außerdem eine von 2 verschiedene Charakteristik hat, **dann ist eine bijektive Abbildung f von X genau dann affin, wenn Sie eine Kollineation ist.**

Beispiele von Körpern, die in Frage kommen sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

Bemerkung statt eines Beweises: Ich kenne nur lange mehrstufige Beweise, um die man m.E. auch nicht herumkommen kann. In dem Buch Geometry von Michèle Audin (Springer 2003, siehe Handapparat zur Geometrie) wird ein Beweis auf den Seiten 41 und 42 als mehrstufige Übungsaufgabe angeboten. In dem Buch zur analytischen Geometrie von Gerd Fischer (Vieweg, 7. und neueste Auflage 2001) wird der größte Teil des Beweises (siehe entsprechende Hinweise auf Seite 35) im Rahmen der projektiven Geometrie geführt.

Satz 7. Fortsetzung und Darstellung affiner Abbildungen.

(a) Jede affine Abbildung aUR-e kommt von einer affinen Abbildung des umgebenden Gesamtraumes her.

(b) Eine affine Abbildung $f : K^n \to K^n$ hat die Darstellung $f = T_{f(a)- \ell(a)} \circ \ell$ mit einem beliebigen $a \in K^n$ und der durch f eindeutig bestimmten (s.o.) linearen Abbildung $\ell \in \mathsf{End}_K(K^n)$ $\big(=: \mathcal{E}(n) \big)$.

(c) Eine bijektive affine Abbildung f von K^n hat die Darstellung $f = T_v \circ \ell$ mit $\ell \in \mathsf{GL}_n(K)$ $\big(=: \mathcal{G}(n) \big)$ und $v \in K^n$.

Definition 8.

(a) bijektive affine Abbildungen heißen **Affinitäten**

(b) $\mathcal{A}(n) := \{$ Affinintäten von $K^n \}$

(c) $\mathcal{T} := \{$ Translationen von $\}$

Satz 9. $\mathcal{A}(n)$ ist eine Gruppe. $\mathcal{G}(n)$ ist Untergruppe von $\mathcal{A}(n)$. $\mathcal{T}(n)$ ist Untergruppe von $\mathcal{A}(n)$. $\mathcal{A}(n) = \mathcal{T}(n) \circ \mathcal{G}(n) = \{g \circ h : g \in \mathcal{T}(n), h \in \mathcal{G}(n)\}$ ist erzeugt von $\mathcal{T}(n)$ und $\mathcal{G}(n)$.
Beachte die Nichtkommutativität $T_v \circ \ell = \ell \circ T_w$, wobei $\ell(w) = v$.

Satz 10. Sei $f : Y \to Y'$ affin und $\mathsf{dim}_K Y = r \geq 0$. Dann ist f als affine Abbildung vollständig bestimmt durch die Bilder von $r + 1$ affin unabhängigen Punkten.
Vergleiche mit der Situation bei linearen Abbildungen.

Beobachtung 11. Eine affine Abbildung ist verträglich mit Affinkombinationen.
Vergleich mit Aufgabe (6)(b).

Geometrische Eigenschaften, die unter affinen Abbildungen erhalten bleiben, werden **affine Invarianten** genannt. Bisherige Beispiele sind: „aUR-e“, „Affinkombinationen“, „Baryzentren“. Besonders wichtig ist die Invarianz von Teilverhältnissen:

Definition 12.

(a) kollinear/komplanar ...

(b) Seien $a, b, c \in K^n$ kollinear, $a \neq b$, dann ist $c = \lambda(b - a)$, bzw. $\overrightarrow{ac} = \lambda \, \overrightarrow{ab}$ mit geeignetem $\lambda \in K$. Das **Teilverhältnis** von a, b, c in dieser Reihenfolge (!) ist dann erklärt als $\mathsf{TV}\,(a, b, c) := \lambda$.

Satz 13. Affine Abbildungen erhalten Teilverhältnisse.

Satz 14. Satz des Thales. Seien $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ verschieden parallele Graden in K^2 und Δ_1, Δ_2 zwei nicht zu Γ parallele Graden. Seien a, a', a'' bzw. b, b', b'' die Schnittpunkte von Δ_1 bzw Δ_2 mit $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$. Dann ist $\mathsf{TV}\,(a, a', a'') = \mathsf{TV}\,(b, b', b'')$.

Satz 15. Strahlensätze. Als unmittelbare Anwendung von Satz 14 erhält man im Sonderfall „$a = b$“ : $\mathsf{TV}\,(a, a', a'') = \mathsf{TV}\,(a, b', b'')$ und $\overrightarrow{a''b''} = \mathsf{TV}\,(a, a', a'') \cdot \overrightarrow{a'b'}$.

Die Strahlensätze sind **affine Sätze!** und gelten über beliebigen Körpern.
Weitere für die Strukturtheorie bedeutsame Sätze sind u.A. die Sätze von Pappus und Desargues. Sie wurden nur angeschrieben mit Bildern, aber nicht bewiesen.

§ 3 Reelle aR-e: weitere geometrische Grundbegriffe/Invarianten.

Geometrische Begriffe wie z.B. 'zwischen', 'Strecke', 'Polygon', 'Polyeder', 'Halbraum', 'konvex' lassen sich über geordneten Körpern erklären. Daher ist jetzt stets ***K*** **ein Unterkörper der reellen Zahlen.**
Literatur zu angeordneten Körpern: erste Infos: Jacobson, Basic Algebra I, Ch. 5.1 (Lehrbuchsammlung), mehr: Knebusch und Scheiderer, Einführung in die reelle Algebra, Vieweg, 1989.

Definition 1. $a, b, c \in K^n$. c **zwischen** a, b, wenn $c = \alpha a + \beta b$ mit $\alpha, \beta \in K$, $\alpha + \beta = 1$ und $\alpha, \beta > 0$.
Motivation: Dann ist $c = a + \beta(b - a)$ mit $0 < \beta < 1$.

Definition 2. $a, b \in K^n$. Die **Strecke** $\boldsymbol{[a, b]}$ mit den Endpunkten a, b ist das Intervall der Punkte zwischen a, b zusammen mit a, b: $[a, b] := \{\alpha a + \beta b : \ \alpha, \beta \in K_{\geq 0}, \alpha + \beta = 1\}$,.

Definition 3. Eine Teilmenge M von K^n heißt **konvex**, wenn gilt

$$\underset{a,b \in M}{\forall} \quad [a, b] \in M \ .$$

Beispiel 4.

(a) $\varnothing$, Punkte und aUR-e sind konvex.

(b) Strecken sind konvex.

(c) $a, b, c \in K^n$. 'Dreieck(ige Menge)' $\mathcal{C}(a, b, c) = \{\alpha a + \beta b + \gamma c : \ \alpha, \beta, \gamma \in K_{\geq 0}, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$ sind konvex.

(d) $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)} \in K^n$.

$$\mathcal{C} := \Big\{ \sum_{i=0}^{r} \alpha_i a^{(i)} : \ \alpha_i \in K_{\geq 0}, \sum_{i=0}^{r} \alpha_i = 1 \Big\}$$

ist konvex und heißt r-Polytop, Polygon, wenn $n = 2$, Polyeder, wenn $n = 3$, r-Simplex, wenn $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ affin unabhängig sind.

(e) **Halbräume in K^n.** Sei $Y \subseteq K^n$ eine affine Hyperebene ($\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} \overrightarrow{Y} = n-1$). Seien $p \in Y, v = v^{(n)} \notin \overrightarrow{Y}$ und $v^{(1)}, \dots, v^{(n-1)}$ Basis von $\overrightarrow{Y}$.

$$\mathcal{H}_{Y,v} := \{x \in K^n : \ (v - \text{Koordinate von } x - p) \in K_{\geq 0}\} \ .$$

Definition 5. Seien $a^{(0)}, \dots, a^{(r)} \in K^n$, $\alpha_0, \dots, \alpha_r \in K_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=0}^r \alpha_i = 1$. Dann heißt $\sum_{i=0}^r \alpha_i a^{(i)}$ Konvexkombination der Punkte $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$.
Beachte die Hierarchie: Linearkombination, Affinkombination, Konvexkombination.
Satz 6. $f : v \to W$, V, W K-Vektorräume, K beliebiger Körper.

(a) f affin $\Leftrightarrow f$ mit Affinkombinationen verträglich.

(b) Wenn $K \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt außerdem: f affin $\Rightarrow f$ mit Konvexkombinationen verträglich.

Satz 7. $f : K^n \to K^n$ affin und $M \in K^n$ konvex. Dann sind (a) $f(M)$ und (b) $f^{-1}(M)$ konvex.
Satz 8. Konvexe Mengen sind Polytop-abgeschlossen. Eine konvexe Menge enthält mit je endlich vielen ihrer Punkte $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ auch $\mathcal{C}(a^{(0)}, \dots, a^{(r)})$.
Satz und Definition 9.

(a) Durchschnitte konvexer Mengen sind konvex.

(b) Für eine Teilmenge M von K^n ist

$$\mathcal{C}(M) := \bigcap_{\substack{C \subseteq K^n \\ C \text{ konvex} \\ M \subseteq C}} C$$

ihre **konvexe Hülle**.

(c)
$$\mathcal{C}(M) = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ a^{(0)}, \dots, a^{(r)} \in M}} \mathcal{C}(a^{(0)}, \dots, a^{(r)})$$

Die folgenden drei Sätze folgen dem Skript von Johann Linhart zur Geometrie:
Satz 10. Satz von Caratheodory.
Satz 11. Satz von Radon.
Satz 12. Satz von Helly.
Beispiel 13. Newton-Polytop
Satz 14.

(a) Jedes r-Polytop ist affines Bild eines r-Simplex.

(b) Jedes r-Simplex ist affines Bild des r-Standard- oder Einheits-Simplex $\mathcal{C}(0, e^{(1)}, \dots, e^{(r)})$.

Definition 15. $\mathcal{C}(e^{(1)}, \dots, e^{(n}, -e^{(1)}, \dots, -e^{(n)}) \subseteq K^n$ heißt **Kreuzpolytop**.
Je nach zeitlichem verlauf wird dieser § später noch fortgesetzt.

Kapitel 2: Analytische Geometrie in euklidischen VR-en.

§ 4 Vorbemerkungen und Beispiele

Erinnerung an die Begriffe 'positiv definite Bilinearform', 'Skalarprodukt', 'Abstand', 'Länge', ´Cauchy-Schwarz-Ungleichung', 'Winkel', 'senkrecht', 'Orthogonalraum',etc.
Wir legen meistens das Standardskalarprodukt zu Grunde.
Beispiele zum Übergang affin→euklidisch.
Beispiel 1. So genannter 'Satz des Pythagoras' ist in unserem Kontext kein Satz, sondern eine elementare Eigenschaft des Skalarproduktes. 'Cauchy-Schwarz' und Winkel.
Beispiel 2. AUR-e in Normalenform im $\mathbb{R}^n$. Sei $\Gamma = a + U$ aUR in $\mathbb{R}^n$ und $\varnothing \neq \Gamma \neq \mathbb{R}^n$. Mit einer Basis $c^{(1)}, \dots, c^{(r)}$ von $U^\perp$ ist

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : (\!(x\,, c^{(i)})\!) = (\!(a\,, c^{(i)})\!) \text{ für } 1 \leq i \leq r\} \ .$$

Man nennt dies eine Normalenform von Γ. Sie ist nicht eindeutig. Im Spezialfall, wo Γ eine Hyperebene ist, dann ist $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} U^\perp = 1$ und wenn etwa $U^\perp = \langle c \rangle_{\mathbb{R}}$ mit $0 \neq c \in \mathbb{R}^n$, dann wählen wir c noch so, dass $\alpha := (\!(a\,, c)\!) \geq 0$ und $\| \, c \, \| = 1$ und erhalten die so genannte **Hesse'sche Normalform**:

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (\!(x\,, c)\!) = \alpha\} \ .$$

Diese Form ist eindeutig, sofern $\alpha > 0$.
Beachte: α ist unabhängig von der Wahl von $a \in \Gamma$. α ist der 'Abstand' (siehe Beispiel 4) der Hyperebene von 0.

Beispiel 3. Halbräume im Kontext der Hesse-Normalform. Wenn $x-a=\lambda c+u$ mit $\lambda \geq 0, u \in U$, dann ist $⟪x\,,c⟫ = \underbrace{⟪a\,,c⟫}_{=\alpha\geq 0} + \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{\| c \|^2}_{=1}$. Daher ist $\mathcal{H}_{\Gamma,\,c} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ ⟪x\,,c⟫ \geq \alpha\}$. Mit der Linearform $\ell_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto ⟪x\,,c⟫$ folgt weiter: $\mathcal{H}_{\Gamma,\,c} = \ell_c^{-1}\big([\alpha,\infty)\big)$, woraus sich mit Satz 7 in § 3 wieder die Konvexität des Halbraums ergibt.
Beispiel 4. Orthogonale Projektion. $\mathbb{R}^n = U \perp W, \Gamma = a+U$. O.E. $a \in W$. ℓ_U sei die Projektion auf U entlang W. Die orthogonale Projektion auf Γ entlang W ist dann die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto a + \ell(x)$. Ist $u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}$ orthogonale Basis von U, dann ist für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\ell_U(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{⟪x\,,u^{(i)}⟫}{⟪u^{(i)}\,,u^{(i)}⟫} \cdot u^{(i)} \ .$$

Man beobachtet dabei: (a) $x - \ell_U(x) \perp U$ und (b) $\| x - \ell_U(x) \| \leq \| x-u \|$ für alle $u \in U$.
Beispiel 5. Abstand aUR-e. Siehe Skript [Sch] Seite 3.
Beispiel 6. Satz des Thales und Folgerungen lassen sich jetzt mit Streckenlängen formulieren. Das bringt jedoch keinen Erkenntnisgewinn. Außerdem: Stufen und Wechselwinkel.
Beispiel 7. Geometrische Objekte 2. Grades. Bisher war alles 'linear. Mit einem Skalarprodukt werden implizit gewisse Flächen 2. Grades eingeführt. Einheitsflächen, Ellipsoide.

§ 5 Abbildungen der euklidischen Geometrie und ihre Invarianten.

Welche Abbildungen sind verträglich mit der Struktur von $\mathbb{R}^n$ als metrischem Raum?
Definition 1.
(a) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt **starr** oder **abstandstreu** oder **Isometrie** oder **Bewegung**, wenn gilt

$$\underset{x,y\in\mathbb{R}^n}{\forall} \quad \| f(x) - f(y) \| = \| x-y \| \ .$$

(b) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt **metrisch** oder **mit dem Skalarprodukt verträglich**, wenn gilt

$$\underset{x,y\in\mathbb{R}^n}{\forall} \quad ⟪f(x)\,,f(y)⟫ = ⟪x\,,y⟫ \ .$$

Beobachtung 2.
(a) Metrische Abbildungen sind starr.
(b) Starre Abbildungen sind injektiv.
(c) Ist $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ starr, dann ist die Abbildung $\ell_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, u \mapsto f(p+u) - f(p) = \overrightarrow{f(p)f(p+u)}$ für fest gewähltes $p \in \mathbb{R}^n$ metrisch.
(d) Metrische Abbildungen sind linear.
(e) Ist $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ starr, dann ist $f = T_{f(p)} \circ \ell_p$ mit ℓ_p aus (c). Insbesondere gilt: ***f* starr ⇒ *f* affin**.
Bemerkungen 3.
(a) Da es nur injektive Bewegungen gibt, wird in der Regel nur die Situation '$m=n$' betrachtet.
(b) Winkeltreue im Sinne der Definition auf Seite 4 in [Sch] ist schwächer als Abstandstreue. Z.B. sind Ähnlichkeiten (siehe Aufgabe (17) winkeltreu. Lineare winkeltreue Abbildungen sind Ähnlichkeiten (Prop. 3.9 in [A], Seite 83). Ein Satz von Liouville besagt: „Bijektive stetig differenzierbare winkeltreue Abbildungen sind Ähnlichkeiten ([A], Exercise III 66 mit Anleitungen, Seiten 111 und 314).
(c) Starre Abbildungen f mit $f(0) = 0$ sind längentreu. Zur Einordnung der Längentreue siehe [Sch], Seite 4.
Beobachtung 4. $\mathcal{B}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f \text{ Bewegung}\}$ und $\mathcal{O}(n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f \text{ metrisch}\}$ sind Untergruppen von $\mathcal{A}(n)$. $\mathcal{B}(n)$ hat die Darstellung

$$\mathcal{B}(n) = \mathcal{T}(n) \circ \mathcal{O}(n) = \{\ T_v \circ \ell :\ v \in \mathbb{R}^n, \ell \text{ metrisch}\} \ .$$

Bemerkungen 5.
(a) Insbesondere existiert f^{-1} für eine Bewegung und ist wieder Bewegung.
(b) Die Bezeichnung $\mathcal{O}(n)$ kommt daher, dass in der Linearen Algebra metrische Abbildungen häufig „orthogonal“ genannt werden. $\mathcal{O}(n)$ ist die so genannte orthogonale Gruppe. Bezüglich einer orthonormierten Basis ist die Matrix A einer metrischen Abbildung orthogonal, d.h. es ist $A^{\mathrm{t}} A = E_n = A\, A^{\mathrm{t}}$. Die verbreitete Bezeichnung orthogonal ist m.E. ungünstig. In [FG], Seite 80, wird der folgende Satz hergeleitet: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Affinität mit der Eigenschaft

$$\text{Für alle Graden } \ Y, Y' \subseteq \mathbb{R}^n : \quad Y \perp Y' \ \Rightarrow f(Y) \perp f(Y') \ ,$$

dann ist f eine Ähnlichkeit.

Definition 6. Kongruenz. Zwei nicht leere Teilmengen $M, M' \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen kongruent, wenn $f(M) = M'$ mit einer Bewegung $f \in \mathcal{B}(n)$. In Zeichen $M \equiv M'$. $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation.
Beobachtung 7. $M \equiv M'$ mit Bewegung $f \Rightarrow \mathcal{C}(M) \equiv \mathcal{C}(M')$ mit der gleichen Bewegung.
Satz 8. Klassische Kongruenzkriterien am Dreieck.
Seien $N, M' \subseteq \mathbb{R}^2$, $M = \{a, b, c\}, M' = \{a', b', c'\}$. Die beiden Punktetripel seine affin unabhängig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $M \equiv M'$ mit Bewegung f und so, dass $f(a) = a', f(b) = b', f(c) = c'$

(b) $\| c - b \| = \| c' - b' \|, \| a - c \| = \| a' - c' \|, \| b - a \| = \| b' - a' \|$ SSS

(c) $\| c - b \| = \| c' - b' \|, (\!(b - a\,, a - c)\!) = (\!(b' - a'\,, a' - c')\!), \| b - a \| = \| b' - a' \|$ SWS

(d) .... SWW

....

Bemerkungen 9.

(a) $n =$ ist unerheblich bei Satz 8, wichtig ist nur, dass a, b, c affin unabhängig sind.

(b) Bei Satz 8 ist die vorgegebene Zuordnung der Punkte wichtig.

(c) Bei Satz 8 geht es nur um Dreiecke. Analoge Aussagen sind möglich für höherdimensionale Simplices, etwa SSWS beim Tetraeder, etc.

(d) Der Kongruenzbegriff in Definition 6 ist für bestimmte Zwecke u.U. zu weit gefasst. Sollen im $\mathbb{R}^2$ Spiegelungen zugelassen werden ? Beachte aber dass ebene Spiegelungen im $\mathbb{R}^3$ als Drehungen erscheinen.

Beobachtung 10. Seien $\mathcal{O}_1(n) := \{f \in \mathsf{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) : \ f \text{ orthogonal }, \mathsf{det}\, f = +1\}$, manchmal auch mit $\mathcal{O}_+(n), \mathsf{SO}(n)$ bezeichnet, und $\mathcal{B}_1(n) := \{f \in \mathcal{B}(n) : \ T_{-f(0)} \circ f \in \mathcal{O}_1(n)\}$.
$\mathcal{B}_1(n)$ ist Untergruppe von $\mathcal{B}(n)$ vom Index 2.
Beispiel 11.

(a) $\mathcal{O}_1(n)$: Drehungen um 0. $\mathcal{O}(n) \setminus \mathcal{O}_1(n)$: Spiegelungen an einer Graden durch 0.

(b) $\mathcal{O}_1(n)$: endliche Produkte von Drehungen um Koordinatenachsen (elementare Drehungen) $\rightarrow$ Eulersche Winkel $\rightarrow$ [Sch] Seite 6 ff.

Eine weitere Invariante: Fläche, Volumen, ...
Beobachtung 12. Seien $a^{(0)}, \ldots, a^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathcal{B}(n)$, dann ist

$$\mathsf{det}\left(f(a^{(1)}) - f(a^{(0)}), \ldots, f(a^{(n)}) - f(a^{(0)}\right) = \epsilon \cdot \mathsf{det}\left(a^{(1)} - a^{(0)}, \ldots, a^{(n)} - a^{(0)}\right)$$

mit $\epsilon = 1$, wenn $f \in \mathcal{B}_1(n)$. Ausführliche Diskussion mit Beispielen zur Berechnung, auch höherdimensional.

§ 6 Ausgewählte Themen der euklidischen Elementargeometrie.

Literatur: Für diesen Abschnitt besonders empfohlen: [KK].
Satz 1. Winkelsumme in der euklidischen Geometrie. (vorerst ohne Beweis)
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ und

$$\cos\alpha := (\!(\frac{b-a}{\| b - a \|}\,, \frac{c-a}{\| c - a \|})\!)\,, \cos\beta := (\!(\frac{c-b}{\| c - b \|}\,, \frac{a-b}{\| a - b \|})\!)\,, \cos\gamma := (\!(\frac{a-c}{\| a - c \|}\,, \frac{b-c}{\| b - c \|})\!)\,.$$

Dann ist $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = \pi}$.

Satz 2. Minimaleigenschaft des Schwerpunkts oder Zentrums. Sei $z := \dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} v^{(i)}$ das Zentrum der Punkte $v^{(1)}, \ldots, v^{(r)} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{r} \| z - v^{(i)} \|^2 = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\mathsf{Min}} \sum_{i=1}^{r} \| x - v^{(i)} \|^2$$

Für $r = 3$ bewiesen mit einem davon nicht abhängigen Beweis.
Satz 3. Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Zentrum und dieses teilt die Strecken $[a, \frac{1}{2}(b + c)], [b, \frac{1}{2}(c + a)], [c, \frac{1}{2}(a + b)]$ im Verhältnis 2:1.
Dabei ist z.B. die Seitenhalbierende der Seite(=Strecke) $[b, c]$ darstellbar als $a \vee \frac{1}{2}(b + c)$.
Satz 4. Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks

(a) schneiden sich in einem Punkt, mit m bezeichnet, und es gilt

(b) und es gilt

$$\| m - a \| = \| m - b \| = \| m - c \| (=: r),$$

m.a.W. a, b, c liegen auf dem Kreis um z mit Radius r, dem so genannten Umkreis des Dreiecks (siehe Def. 7 und Satz 8).

Dabei ist z.B.

$$M_{ab} = \frac{a+b}{2} + Rn_c = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle\!\langle x\,, b-a \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \frac{a+b}{2}\,, b-a \rangle\!\rangle = \frac{1}{2}(\| b \|^2 - \| a \|^2)$$

und n_c ist ein Normalenvektor zur Graden $a \vee b$, m.a.W. $(a-b)^\perp = \mathbb{R}n_c$.
Satz 5. Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, mit h bezeichnet.
Dabei ist z.B. die Höhe, die a enthält dargestellt als $H_a = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle\!\langle x\,, b-c \rangle\!\rangle = \langle\!\langle a\,, b-c \rangle\!\rangle\}$.
Satz 6.
(a) Eulergleichung. $3z = 2m + h$.
(b) Eulergrade. m, z, h liegen auf einer Graden.
Hinweis: Allerdings ist die Eulergrade nicht mehr eindeutig, wenn das Dreieck gleichseitig ist, d.h. wenn $\| b-a \| = \| c-b \| = \| a-c \|$ ist, denn dann ist $m = h = z$. **Definition 7.** Zu $m \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist $K_{m,r} = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x-m \| = r\}$ die ***n*-dimensionale Kugel (-Oberfläche)**, oft auch **Sphäre** genannt, und $\mathcal{K}_{m,r} = \mathcal{C}(K_{m,r})$ die ***n*-dimensionale Voll-Kugel**, oft auch nur Kugel genannt. Wenn $n = 2$, spricht man vom Kreis (-Rand) und der Kreisscheibe, oft ebenfalls nur Kreis genannt.
Satz 8. Es gibt genau einen Kreis, auf dem drei gegebene affin unabhängige Punkte $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ liegen. Er wird **Umkreis** des durch a, b, c gegebenen Dreiecks genannt.
Definition 9. Der nach Satz 8 eindeutige Kreis durch die Seitenmitten eines Dreiecks mit affin unabhängigen Ecken heißt **Feuerbachkreis.**[(2)] Der Mittelpunkt des Feuerbachkreises werde mit $\boldsymbol{f}$ bezeichnet.
Satz 10.
(a) Feuerbachgleichung. $3z = 2f + m$. .
(b) f ist der Mittelpunkt der Strecke $[m, h]$ und liegt somit auf der Eulergraden.
Zu beachten ist auch hier den Hinweis nach Satz 6.
(c) Die Lage der Punkte m, z, h, f zu einander auf der Eulergrade wird beschrieben durch die Gleichungen

$$\frac{1}{3}(f-h) = z - f = \frac{1}{2}(m-z)$$

(d) $\text{Radius}_{\text{Umkreis}} = 2 \cdot \text{Radius}_{\text{Feuerbachkreis}}$
Bemerkungen 11. Auf dem Feuerbachkreis liegen etliche weitere ausgezeichnete Punkte des Dreiecks. So zum Beispiel die **Mitten der Höhenabschnitte** $\frac{1}{2}(h+a), \frac{1}{2}(h+b), \frac{1}{2}(h+c)$. Ebenso die **Höhenfußpunkte** $(h \vee a) \cap (b \vee c), (h \vee b) \cap (c \vee a), (h \vee c) \cap (a \vee b)$, mehr dazu in [KK].

Zu Eulergrade und Feuerbachkreis kann über die Vorlesungsseite ein Cinderella-Applet benutzt werden.

Aus dem vorangehenden Rahmen fallen die Winkelhalbierenden.
Satz 12. Seien a, b, c affin unabhängig. Die inneren **Winkelhalbierenden** des zugehörigen Dreiecks sind die Graden

$$\begin{aligned} W_a &= a + \mathbb{R}\Big(\frac{(b-a)}{\| b-a \|} + \frac{(c-a)}{\| c-a \|}\Big) \\ W_b &= b + \mathbb{R}\Big(\frac{(c-b)}{\| c-b \|} + \frac{(a-b)}{\| a-b \|}\Big) \\ W_c &= c + \mathbb{R}\Big(\frac{(a-c)}{\| a-c \|} + \frac{(b-c)}{\| b-c \|}\Big)\ . \end{aligned}$$

Sie schneiden sich in im Punkt

$$w = \frac{\| b-a \| + \| c-a \| + \| a-c \|}{\| b-c \| \cdot a + \| c-a \| \cdot b + \| b-a \| \cdot c}$$

Siehe dazu auch Aufgabe (22)(b).
Satz 13. Existenz und Eindeutigkeit der Umkugel. $n+1$ affin unabhängige Punkte im $\mathbb{R}^n$ bestimmen eindeutig eine n-Kugel (-oberfläche) bzw. eine n-Sphäre.
Beim Beweis werden die **Mittelsenkrechten der Kanten eines *n*-Simplex** eingeführt, das durch die $n+1$ affin unabhängigen Punkte $a^{(0)}, \ldots, a^{(n)}$ bestimmt ist. Es sind dies die Hyperebenen

$$\Gamma_{i,j} = \Gamma_{j,i} = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - a^{(i)} \| = \| x - a^{(j)} \|\}\ ,$$

und es gibt genau einen gemeinsamen Punkt $m \in \mathbb{R}^n$:

$$\{m\} = \bigcap_{j=0}^{n} \Gamma_{0,j}\ .$$

....

[(2)] Karl Wilhelm Feuerbach, 1800-1834, Gymnasiallehrer in Erlangen.

Interessant für uns der Spezialfall $n = 3$, der noch ein wenig weiterverfolgt wird. Wie erscheinen ausgewählte Begriffe der Dreiecksgeometrie beim Tetraeder?
Mittelsenkrechten, Umkugel: s.o. Außerdem werden besprochen: Seitenhalbierende und Höhen. Weiteres Material in [FR].

§ 7 Geometrische Objekte höheren Grades.

Viele und lange einführende und einordnende Bemerkungen.
Definition 1. Nullstellenmengen. L Erweiterungskörper von K. Zu $\Phi \subseteq K[x]$, $\varnothing \neq \Phi, K[x] = K[x_1, \ldots, x_n]$, ist

$$\mathcal{V}_L(\Phi) = \{v \in L^n : \ \varphi(v) = 0 \text{ für alle } \varphi \in \Phi\}$$

die Nullstellenmenge von Φ.
Beispiel 2.

(a) Standardsituation: $K = \mathbb{Q}, L \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{A} \cap \mathbb{R}, \mathbb{A}\}$.

(b) $\varphi = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0 \in K[x]$, nicht alle $a_i, 1 \leq i \leq n$ sind 0. $\mathcal{V}_L(\varphi)$ ist eine Hyperebene.

(c) $\varphi = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - r^2 \in K[x]$. $\mathcal{V}_L(\varphi)$ ist n-Kugel oder n-Sphäre in L^n.

(d) Polynom vom Totalgrad zwei in n Variablen: $0 \neq A \in K^{n\times n}, b \in K^n, c \in K$. $\boxed{\varphi = {}^{\mathsf{t}}xAx + {}^{\mathsf{t}}xb + c}$, o.E. A symmetrisch, denn $\varphi = \frac{1}{2}{}^{\mathsf{t}}x(A+{}^{\mathsf{t}}A)x+{}^{\mathsf{t}}xb+c$. $\mathcal{V}_L\varphi)$ heißt Fläche zweiten Grades, quadratische Fläche oder Quadrik. Klassifikation der Quadriken

Beobachtung 3. Affinitäten erhalten den Totalgrad. Transformationsformel für n=2, $x = Px' + v$:

$$\varphi'(x') = \varphi(Px' + v) = {}^{\mathsf{t}}x' \ \underbrace{{}^{\mathsf{t}}PAP}_{=A'} \ x' + {}^{\mathsf{t}}x' \ \underbrace{({}^{\mathsf{t}}P(A + {}^{\mathsf{t}}A)v + {}^{\mathsf{t}}Pb)}_{=b'} + \underbrace{({}^{\mathsf{t}}v(Av + b) + c)}_{=c'}$$

Diese Transformationsformel ist Ansatzpunkt für die Klassifizierung. Beispiel dazu in der Übungsstunde.
Beispiel 4.

(a) **Ellipse.** Was ist eine Ellipse ?? Algebraische Definition als Nullstellenmenge eines Polynoms gegenüber geo-*metrischer* Definition, die z.B. wie folgt aussehen kann:

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}_{a,b,s} := \{x \in \mathbb{R}^2 : \| \ x - a \ \| + \| \ x - b \ \| = s\}$$

Mit einer geeigneten Bewegung f kann erreicht werden, dass $a \mapsto a' = \alpha\, e^{(1)}, b \mapsto b' = -a$ und dann ist (Beweis in VL nach [K])

$$f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}' = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\varphi')$$

mit

$$\varphi' = \frac{x_1^2}{(\frac{s}{2})^2} + \frac{x_2^2}{(\frac{s}{2})^2 - \alpha^2} = 1 \ .$$

(b) analog für Hyperbel

(c) analog für Parabel, hier jedoch mit Leitlinie, siehe [FG]

Beispiele zum Teil auch mit Seilkonstruktionen. Tangenten als spezielle Winkelhalbierende, Anwendungen nach [J].

◇

Abschlussbemerkungen zur euklidischen Geometrie. Hinweise auf aktuelle Entwicklungen u.A. im Bereich geometrische Algebra, geometric computing. Ein Link dazu:

`http://www.gris.informatik.tu-darmstadt.de/~dhilden/`

Kapitel 3: Analytische projektive Geometrie.

Vorbemerkungen
Warum projektive Geometrie? Ausführliche historisch-genetische und Mathematik-systematische Hinweise. Kurze Angaben zu Anwendungen.
Literatur: [A], [FG], [J], [B].
Unser Zugang zur abstrakten Definition projektiver Räume (Definition 1, in § 9) dieses mal: Ausgehen von euklidischer Geometrie des vorangehenden Kapitels, Nullstellenmengen, Homogenisierung und Dehomogenisierung, Spezialfall Schnitte kegelförmiger Mengen mit affinen Unterräumen (applet zu Kegelschnitten siehe Vorlesungsseite), Zentralprojektion räumlicher Objekte auf Ebenen (Bildschirm Leinwand,..), Strahlenräume.

§ 8 Homogenisierung, Dehomogenisierung, kegelförmige Mengen und Schnitte.

Definition 1. $\varphi \in K[x_0, \ldots, x_n]$ heißt **homogen vom Grad $d \in \mathbb{N}$**, wenn $\varphi = 0$ oder wenn $\varphi = \sum_{i=1}^{r} c_i x^{\alpha^{(i)}}$ mit $c_i \in K \setminus \{0\}$ und $|\alpha^{(i)}| = d$ für $1 \leq i \leq r$.
Satz 2. (o.Bew. → Algebra/algebraische Geometrie) Wenn $|K|$ nicht endlich, dann gilt für $d \in \mathbb{N}$, $\varphi \in K[x_0, \ldots, x_n]$:

$$\varphi \text{ homogen vom Grad } d \iff \underset{\lambda \in K}{\forall} \; \underset{v \in K^{n+1}}{\forall} : \; \varphi(\lambda v) = \lambda^d \varphi(v)$$

$$\iff: \; \varphi \text{ induziert d-homogene Funktion auf } K^{n+1}$$

Definition 3. Zu $\varphi \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i x^{\alpha^{(i)}}$, $c_i \neq 0$, ist $\varphi_h := x_0^d \, \varphi(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$ mit $d = \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha^{(i)}|$ die **Homogenisierung von $\boldsymbol{\varphi}$** (**mit $\boldsymbol{x_0}$**, oft wird auch mit der neuen Variablen x_{n+1} an Stelle von x_0 homogenisiert.)
Zum (homogenen) Polynom $\varphi \in K[x_0, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ ist $\varphi^* := \varphi(1, x_1, \ldots, x_n)$ die **Dehomogenisierung** (bezüglich x_0).
Beispiel 4. $\varphi = x_1^3 + x_2^2 + x_3, \varphi_h = ..., (\varphi_h)^* = \varphi$ **aber** etwa: $((x_0^2 + x_0 x_1)^*)_h = x_0 + x_1$.
Beobachtung 5. Ist $\varphi \in K[x_0, \ldots, x_n]$ homogen, dann ist $\mathcal{V}_K(\varphi)$ eine homogene (strahlenabgeschlossene, kegelförmige) Teilmenge von $K^{(n+1)}$.
Beispiel 6.
(a) $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 1 \in \mathbb{R}[x_1, x_2], \varphi_h \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2], \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\varphi_h) = ...$
(b) $\varphi = y_1^2 - 2y_2 + 1, \varphi_h = y_1^2 - 2y_0 y_2 + y_0^2$. Wie sieht $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\varphi_h)$ aus? Bestimmung eines Polynoms $\psi \in \mathbb{R}[z_1, z_2]$, das die Schnittmenge bezüglich der Schnittebene beschreibt. Damit ist gemeint, dass bezüglich eines rechtwinkligen normierten Koordinatensystem in der Schnittebene die Nullstellenmenge $\mathcal{V}(\psi)$ die Schnittmenge ergibt.
Darstellung von $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\varphi_h)$ als Vereinigung von Strahlen durch die Punkte der Schnittmenge.
Bemerkung zu „Kegelschnitten“ als Sonderfall von Schnitten kegelförmiger Mengen mit affinen Unterräumen und zum Zusammenhang der vielen möglichen Schnitte über die kegelförmige Menge.
Beispiel 7. Siehe Ausarbeitung als Maple-Arbeitsblatt auf der Vorlesungsseite im Internet und dann Aufgabe (27/28).

Benötigte Regeln:
Satz 8. $f: \; K^n \to K^n$ bijektiv, $\varphi \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Dann ist $\mathcal{V}_K(\varphi) = f\big(\mathcal{V}(\varphi \circ f)\big)$.
Außerdem gilt für beliebige $\varphi, \psi, \mu \in K[x_0, \ldots, x_n]$: $\mathcal{V}_K(\varphi + \mu\,\psi, \psi) = \mathcal{V}_K(\varphi, \psi)$.

§ 9 Das Unendliche einfangen, Projektivisierung.

Ausführliche Vorbemerkungen und Motivationen, u.A. „Fluchtpunkte“ und Verhältnis zwischen Homogenisierung und Projektivisierung von Punktmengen:
Sei $F \subseteq K^{n+1}$, dann ist $\boldsymbol{F_h} = \bigcup_{v \in F} Kv$ die ***F* zu gehörende homogene Menge (Homogenisierung von *F*)** und die Menge $\boldsymbol{\mathbb{P}_K(F)} = \{Kv : \; v \in F, \; v \neq 0\}$, also die Menge der Strahlen von F_h, ist die **Projektivisierung** von F.

Man beachte den Unterschied zwischen F_h und $\mathbb{P}_K(F)$!

Verweis auf die gescannten Beispielseiten 115-119 des vergriffenen Büchleins [J] auf der Vorlesungsseite.

Definition 1. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

(a) $\mathbb{P}_K(V) = \{Kv : v \in V, v \neq 0\} = \{U \subseteq V : U$ ist UVR von V und $\mathsf{dim}_K = 1\}$ ist der **projektive Raum zu V**.

(b) $\mathbb{P}_K^n := \mathbb{P}_K(K^{n+1})$ ist der ***n*-dimensionale (s.u.) projektive Standardraum** über K.

(c) Die Elemente von $\mathbb{P}_K(V)$ heißen **(projektive) Punkte** („Punkte vor einer möglichen Projektion auf eine Hyperebene, die nicht durch 0 geht").

Definition 1 gegenüber steht die **synthetische Definition eines Projektiven Raumes** die im Wesentlichen so vorgeht:
Sei Y ein mindestens 2-dimensionaler affiner Raum. Parallelität „$\|$" von Graden ist eine Äquivalenzrelation unter den Graden in Y. Der projektive Abschluss von Y ist dann $\overline{Y}^{\,\mathsf{p}} := Y \bigcup \left({}^{Y}\!/_{\|} \right)$ zusammen mit weiteren Festlegungen. So muss z.B. gesagt werden, was eine projektive Grade sein soll: $\Gamma \cup \{[\Gamma]\}$, wobei Γ eine Grade im affinen Raum Y ist und $[\Gamma]$ die Äquivalenzklasse von Γ bezüglich „$\|$". Dass dies sinnvoll ist, können wir im Beispiel des projektiven Standardraumes von unserem analytischen Standpunkt aus wie folgt nachvollziehen:
Einbettung von K^n in K^{n+1}: Die Abbildung

$$\boldsymbol{\varepsilon : K^n \to K^{n+1}}\,, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto a^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{n} x_i a^{(i)}$$

mit einer Basis $a^{(1)}, \ldots, a^{(n+1)}$ von $K^{(n+1)}$ ist eine injektive affine Abbildung. Man spricht von einer **Einbettung von K^n als (nicht durch 0 gehende) Hyperebene $H = a^{(n+1)} + \langle a^{(1)}, \ldots, a^{(n)} \rangle_K$**, dem Bild von K^n in K^{n+1} unter ε.
Die Abbildung

$$\boldsymbol{\pi : K^n \to \mathbb{P}_K^n}\,, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto K\big(a^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{n} x_i a^{(i)}\big)$$

nennen wir **Projektivierung**. π ist ebenfalls injektiv und nicht surjektiv. Die „unendlich fernen Punkte" $K(\sum_{i=1}^{n} x_i a^{(i)})$ der Graden in $\varepsilon(K^n)$ kommen nicht vor. Zur Graden $\Gamma = v + \langle u \rangle_K$ in K^n, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \neq 0$, gehört die projektive „Gerade"

$$\{K \cdot \varepsilon(v + \lambda u) : \lambda \in K\} \bigcup \underbrace{\{K\,\widetilde{u}\}}_{\substack{\text{unendlich} \\ \text{ferner} \\ \text{projektiver} \\ \text{Punkt}}} = \mathbb{P}_K \left(\langle v + a^{(n+1)}, \widetilde{u} \rangle_K \right) .$$

mit $\widetilde{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i a^{(i)}$. Alle unendlich fernen Punkte zusammen bilden die projektive unendlich ferne Hyperebene:

Definition und Beobachtung 2. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

(a) $\mathsf{dim}_K \mathbb{P}_K(V) := \mathsf{dim}_K V - 1$, auch wenn $V = \{0\}$ und damit $\mathbb{P}_K(V) = \varnothing$.

(b) Eine Teilmenge M von $\mathbb{P}_K(V)$ heißt projektiver Unterraum von $\mathbb{P}_K(V)$, wenn $U = \bigcup_{p \in M} p$ ein Untervektorraum von V ist. Ist dies der Fall, dann wird als **(projektive) Dimension** festgelegt $\mathsf{dim}_K M := \mathsf{dim}_K U - 1$. Wie im affinen Raum spricht man von **(projektiven) Graden, Ebenen, Hyperebenen** je nachdem ob die (projektive) Dimension 1, 2 oder $n-1$ ist.

(c) Projektive Unterräume sind projektive Räume.

(d) Ist U ein Untervektorraum von V, dann ist $\mathbb{P}_K(U)$ ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}_K(V)$ und es ist stets $U = \bigcup_{p \in \mathbb{P}_K(U)} p$.

Satz 3. Mit Punkt, Grade etc. sind stets die projektiven Begriffe gemeint.

(a) Je zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{P}_K(V)$ liegen auf genau einer Graden.

(b) Sei $\mathsf{dim}_K \mathbb{P}_K(V) = 2$. Je zwei verschiedene Graden in $\mathbb{P}_K(V)$ schneiden sich in genau einem Punkt.

(c) Sei $n = \mathsf{dim}_K \mathbb{P}_K(V)$. Je zwei verschiedene Hyperebenen in $\mathbb{P}_K(V)$ schneiden sich in genau einem Unterraum der Dimension $n-2$.

Beobachtung 4. Durchschnitt und Verbindungsraum. Seien $\mathcal{P}_i, i \in I, \mathcal{P}_i = \mathbb{P}_K(U_i)$ mit einer Indexmenge I.

(a) $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{P}_i := \mathbb{P}_K\big(\bigcap\limits_{i\in I} U_i\big)$ ist ein projektiver Unterraum.

(b) $\bigvee_{i\in I} \mathcal{P}_i := \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{R}\text{proj. UR} \\ \forall_{i\in I}\, \mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{R}}} = \mathbb{P}_K\big(\sum\limits_{i\in I} U_i\big)$ ist der (projektive) Verbindungsraum der $\mathcal{P}_i$.

Beispiel und Definition 5.

(a) Zu p_1, p_2 aus $\mathbb{P}_K(V)$, $p_1 \neq p_2$ ist $p_1 \vee p_2$ eine Grade.

(b) p_1, p_2, p_3 aus $\mathbb{P}_K(V)$ heißen **nicht kollinear**, wenn $\mathsf{dim}_K p_1 \vee p_2 \vee p_3 = 2$ und sonst kollinear.

(c) Drei oder mehr Geraden in $\mathbb{P}_K(V)$ heißen **konkurrent**, wenn sie sich in einem Punkt schneiden.

Bisher gab es nur Motivationen und viele Bemerkungen, erste Definitionen und erste Eigenschaften. Jetzt folgt ein Beispiel eines bedeutsameren Ergebnisses aus der projektiven Geometrie. An ihm lässt sich auch schön der Zusammenhang verschiedener affiner Ergebnisse über ihre gemeinsame projektive Verallgemeinerung sehen.

Satz 6. Der projektive Satz von Desargues.

(a) Seien p_1, p_2, p_3 und p'_1, p'_2, p'_3 paarweise verschiedene Punkte in einer projektiven Ebene $\mathbb{P}_K(V)$ mit der Eigenschaft („zwei Dreiecke in perspektiver Lage“):

$$p_1 \vee p'_1,\ p_2 \vee p'_2,\ p_3 \vee p'_3 \quad \text{sind konkurrent} \quad .$$

Dann sind die Schnittpunkte

$$(p_1 \vee p_2) \cap (p'_1 \vee p'_2)\ , \quad (p_2 \vee p_3) \cap (p'_2 \vee p'_3)\ , \quad (p_3 \vee p_1) \cap (p'_3 \vee p'_1)$$

kollinear.

(b) **„Duale Aussage“**. Seien G_1, G_2, G_3 und G'_1, G'_2, G'_3 paarweise verschiedene Geraden in einer projektiven Ebene $\mathcal{P}_K(V)$ mit der Eigenschaft

$$G_1 \cap G1',\ G_2 \cap G'_2,\ G_3 \cap G'_3 \quad \text{sind kollinear} \quad .$$

Dann sind die Geraden

$$(G_1 \cap G_2) \vee (G1' \cap G'_2)\ , \quad (G_2 \cap G_3) \vee (G'_2 \cap G'_3)\ , \quad (G_3 \cap G_1) \vee (G'_3 \cap G1')$$

konkurrent.

Behandlung des **Dualitätsprinzips der projektiven Geometrie im Spezialfall des $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.**
Nähere Betrachtung des Wechselspiels „projektiver Raum“ „affine Ausschnitte“ .
Bemerkungen zu affinen Varianten des Satzes von Desargues als Spezialisierungen von Satz 6(a) und (b).

Der Übergang vom projektiven Raum zu einer affinen Realisierung bezüglich einer projektiven Hyperebene $\mathcal{H}$ wird durch die folgende von $\mathcal{H}$ abhängigen Abbildung α dargestellt:

$$\alpha : \mathbb{P}(V) \setminus \mathcal{H} \ \to\ \Gamma, \quad p \mapsto p \cap \Gamma\ .$$

Dabei ist $\Gamma = v + U$ und $U = U(\mathcal{H})$. Die Abbildung α ist bijektiv. Mit Ihrer Hilfe lässt sich bei geeigneter Einführung einer Topologie in $\mathbb{P}(V)$ zeigen, dass $\mathbb{P}(V) \setminus \mathcal{H}$ zusammenhängend ist!

§ 10 Projektive Unabhängigkeit.

§ 11 Projektive Abbildungen.