Modul Geometrie
WiSe 2008/2009
Schmale

Klausur 31. Januar 2009
14.00 bis 16.00
W3-1-161

Name	Vorname

Ich habe das Merkblatt gelesen.	Unterschrift:

Matrikelnummer	Geburtsdatum	Studiengang

1 (3 P)	2 (7 P)	3 (2 P)	4 (5 P)	5 (2 P)	6 (5 P+)	Punkte Klausur	Punkte(*) Übung	Summe	**Note**

Alle Antworten auf Fragen sind, außer bei Aufgabe (4), zu begründen, damit sie gewertet werden können. Rechnungen sind so darzustellen, dass der Rechenweg (z.B. durch Text) deutlich erkennbar ist. Maximal sind 24 Punkte in der Klausur erreichbar.

Dies sind die **Aufgaben, viel Erfolg !**

(1) **(3P)** Seien K ein Körper und a, b aus K^2. Ist die Abbildung

$$f : K^2 \to K^2,\ v \mapsto f(v) = \begin{bmatrix} \mathsf{det}\,(v + a, b) \\ \mathsf{det}\,(a, v + b) \end{bmatrix}$$

affin?

Vorschlag: betrachten Sie $f(v) - f(0)$ und benutzen Sie Ihre Kenntnisse aus der linearen Algebra.

(2) **(7P)** In $\mathbb{R}^2$ seien folgende Punkte gegeben:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a' = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, b' = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, c' = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die eindeutig bestimmte affine Abbildung derart, dass

$$f(a) = a', f(b) = b', f(c) = c' .$$

(a) Bilden a, b, c eine affine Basis von $\mathbb{R}^2$?

(b) Warum ist f eindeutig bestimmt ?

(c) Beschreiben Sie, wie Sie eine Affinkombination der Vektoren a, b, c berechnen würden, die den Vektor d ergibt.

Das Ergebnis bei Durchführung einer Berechnung ist: $\dfrac{1}{5}\ a + \dfrac{1}{5}\ b + \dfrac{3}{5}\ c = d.$

(d) Berechnen Sie $f(d)$.

(e) Bestimmen Sie die zu f gehörende lineare Abbildung ℓ, bzw. die Matrix von ℓ bezüglich der Basis $(b - a, c - a)$ und dem Bezugspunkt a in der Darstellung von f in der Form $f(x) = f(a) + \ell(x - a)$ für $x \in \mathbb{R}^2$.

(f) Ist f eine Bewegung ?

(3) **(2P)** Wie viele Elemente muss der Körper K mindestens enthalten, damit alle Punkte im Satz des Thales (Version Satz 14 in § 2) paarweise verschieden sind und außerdem Δ_1, Δ_2 nicht parallel sind?

(4) **(5P)** Eine nicht leere Teilmenge M von $\mathbb{R}^2$ heiße *sternförmig*, wenn es einen Punkt z in M gibt derart, dass gilt:

$$\underset{v \in M}{\forall} \quad [z, v] \subseteq M \ .$$

Ein solches z werde *Zentralpunkt* von M genannt. Beantworten Sie folgende Fragen in den jeweiligen Kästchen mit Ja oder Nein. Jede richtige Antwort ergibt einen Punkt. Jede falsche einen Minuspunkt. Weniger als 0 Punkte sind nicht möglich.

(a) Es gibt immer nur einen Zentralpunkt in einer Sternförmigen Menge! ☐

(b) Eine konvexe Menge ist stets sternförmig! ☐

(c) Der Durchschnitt zweier sternförmiger Mengen ist sternförmig! ☐

(d) Haben zwei sternförmige Mengen einen gemeinsamen Zentralpunkt, dann ist ihre Vereinigung sternförmig. ☐

(e) Der Durchschnitt einer konvexen Menge mit einer sternförmigen Menge ist sternförmig. ☐

(5) **(2P)** Beschreiben Sie die wesentlichen Schritte unseres Beweises des Satzes von Carathéodory (nicht der eventuell zu benutzenden Hilfsresultate).

(6) **(5P + 3 BP)** Gegeben sind die beiden folgenden projektiven Geraden G, G' in $\mathbb{P}^2_K$:

$$G = p \vee q, \ G' = p' \vee q' \quad \text{mit} \ \ p = Ku, q = Kv, p' = Ku', q' = Kv' \ ,$$

$$\text{und mit} \ \ u = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, u' = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, v' = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \ .$$

In K^3 sei $\Gamma = e^{(3)} + \langle e^{(1)}, e^{(2)} \rangle_K$ mit den Standardbasisvektoren $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$.

(a) Bestimmen Sie $\gamma = U(G) \cap \Gamma$ und $\gamma' = U(G') \cap \Gamma$.

(b) Bestimmen Sie $c = \gamma \cap \gamma'$.

(c) Bestimmen Sie $G \cap G'$.

(d) Geben Sie eine Hyperebene Δ in K^3 an , die 0 nicht enthält und mit der Eigenschaft, dass $U(G) \cap \Delta$ und $U(G') \cap \Delta$ parallel sind.

Wählen Sie dabei den Körper K nach Ihrem Geschmack.

◇ ◇
◇
◇ ◇

....

(*) umgerechnet entsprechend dem Gewicht der Übungen in der Gesamtnote.