Modul Geometrie — Stand 26. Januar 2009

Wintersemester 2008-2009

Schmale

# Musterlösungen

(manche kurz und manche sehr ausführlich)

**(7)** **(a)** Sei $M = \{a^{(0)}, \dots a^{(5)}\}$. Benutzt werden kann z.B. die Information aus Satz 5 in §1, nach der sich im vorliegenden Spezialfall die affine Hülle von $M$ wie folgt darstellen lässt:

$$\overline{M}^{\,\mathsf{aff}} = \bigcap_{\substack{Y \text{ aUR von } X \\ M \subseteq Y}} Y = a^{(0)} + W, \quad \text{wobei } W = \langle\, \overrightarrow{\{a^{(i)} - a^{(0)} : 1 \le i \le 5\}}\, \rangle_{\mathbb{Q}} \ .$$

Mit einer aus der linearen Algebra bekannten Methode Ihrer Wahl berechnen Sie nun eine Basis für $W$. Wenn Sie sich nicht verrechnen, wird sie die Länge 3 haben. Ist also $\mathcal{W} = \{w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}\}$ Ihre Basis, dann gilt offensichtlich

$$\overline{M}^{\,\mathsf{aff}} = a^{(0)} + \langle\, \mathcal{W}\, \rangle_{\mathbb{Q}} \ .$$

Nach Satz 7 in §1 ist daher $\mathcal{A} = \{a^{(0)}, a^{(0)} + w^{(1)}, a^{(0)} + w^{(2)}, a^{(0)} + w^{(3)}\}$ eine affine Basis der affinen Hülle von $M$.

**(b)** Die gesuchten affinen Koordinaten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ von $p$ sind die üblichen aus der linearen Algebra bekannten Koordinaten des Richtungsvektors $p - a^{(0)}$ bezüglich Ihrer Basis $\mathcal{W}$ aus (a).

**(c)** Erinnerung: Nach Satz 12 in §1 sind die Koeffizienten einer Affinkombination $p = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i \big(a^{(i)} + w^{(i)}\big)$ mit $w^{(0)} = 0$ und mit der Nebenbedingung $\sum_{i=0}^{3} \lambda_i = 1$ eindeutig bestimmt, wenn die kombinierten Vektoren eine affine Basis bilden und heißen dann affine Koordinaten von $p$. Eine solche Kombination für $p$ erhält man mit $\big(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\big) = \Big(\underbrace{1 - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i}_{=:\,\alpha_0}\ ,\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\Big)$ mit den $\alpha_i$ aus (b).

**(8)** **(a)** Ist $\ell$ ein Automorphismus von $U$ (bijektive lineare Abbildung von $U$ nach $U$), dann erfüllt mit $\varphi$ auch $U \circ \varphi$ die Bedingungen (A1) und (A2) aus Definition 2 in §. Letzteres ist durch nachrechnen zu bestätigen.

**(b)** Die Menge $X$ ist Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, das man durch komponentenweises Anschreiben der Gleichung $AB = C$ erhält, oder dadurch, dass man die Linearität der Abbildung $\ell : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, B \mapsto AB$ nachweist. Dann ist nämlich $X$ leer oder $X = B^* + \mathsf{Kern}\ \ell$ mit einer speziellen Lösung $B^*$.

**(c)** Es ist $f(B) = A^2 + \ell(B)$ mit der linearen Abbildung (Nachweis) $\ell\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, B \mapsto BA - AB$. Nach Definition 1 und Satz 2 in §2 ist daher $f$ affin.

**(9)** **(a)** Sei $f : Y \to Y$ eine echte Dilatation des affinen Unterraumes $Y$ von $K^n$. Es gibt dann zwei Punkte $p$ und $p'$ und ein $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, derart, dass für $q \in Y$ gilt

$$f(q) = p' + \alpha(q - p) \ .$$

Sei nun $\Gamma$ eine Grade in $Y$, etwa $\Gamma = a + U$. Dann ist

$$f(a+u) = p' + \alpha((a+u) - p) = \underbrace{(p' + \alpha(a - p))}_{=:\, b} + \alpha u.$$

Zeigen Sie nun noch, dass $f(a + U) = b + U$. $\Gamma$ und $f(\Gamma)$ sind dann nach der Definition in der Aufgabenstellung strikt parallel.

**(b)** Seien $f_1, f_2 : Y \to Y$ Dilatationen und gelte entsprechend Beispiel 3(d) in §2 mit $p_1, p_1', p_2, p_2' \in Y$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in K$

$$f_1(q) = p_1' + \alpha_1(q - p_1), f_2(q) = p_2' + \alpha_2(q - p_2) \quad \text{für } q \in Y.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\big(f_2 \circ f_1\big)(q) &= f_2(f_1(q)) = f_2(p_1' + \alpha_1(q - p_1)) \\ &= p_2' + \alpha_2((p_1' + \alpha_1(q - p_1)) - p_2) \\ &= \underbrace{(p_2' + \alpha_1 p_1' - \alpha_2 p_2)}_{=:p_3'} + \underbrace{\alpha_1\alpha_2}_{=:\alpha_3}(q - p_1)\end{aligned}$$

für alle $q \in Y$ und damit ist $f_2 \circ f_1$ eine Dilatation.

**(11) (a)** Variante 1: Mit geeigneten $\lambda, \mu \in K$ muss gelten:

$$b - a = \lambda(c - d) \text{ und } d - a = \mu(c - b).$$

Genauso gilt dann

$$b - a = \lambda(c - d) \text{ und } (b - a) + (d - c) + (c - b) = \mu(c - b),$$

woraus sich (b-a) eliminieren lässt. Man erhält dadurch

$$(\lambda + 1)(d - c) = (\mu - 1)(c - b).$$

Die beiden Richtungsvektoren $(d - c)$ und $(c - b)$ sind auf Grund der Voraussetzungen der Aufgabe $K$-linear unabhängig (zu zeigen!). Es folgt: $\lambda = 1$ und $\mu = 1$.

Variante 2: Wenn man nicht sieht, dass es günstiger ist, mit Richtungsvektoren zu rechnen, dann kann man mit demselben Ansatz aus den beiden Gleichungen z.B. $a$ eliminieren. Man erhält dann

$$(\mu - 1)b + (\lambda - \mu)c + (1 - \lambda)d = 0 \ . \tag{1}$$

Wäre dabei $\mu \neq 1$ dann erhielte man für $b$ die Darstellung:

$$b = (\mu - \lambda)/(\mu - 1)c + (\lambda - 1)/(\mu - 1)d.$$

Letzteres ist eine Affinkombination, da die Summe der Koeffizienten 1 ergibt. $b$ liegt also auf der Graden durch $c$ und $d$ im Gegensatz zu den Voraussetzungen. Somit ist $\mu = 1$ und in (1) folgt $c = d$ oder eben $\lambda = 1$.

**(b)** Um den Durchschnitt $\big(\frac{1}{2}(a + b) \vee \big) \vee \big(a \vee c\big)$ zu bestimmen, suche ich nach $\lambda, \mu \in K$, mit denen gilt

$$d + \lambda\Big(\frac{1}{2}(a + b) - d\Big) = a + \mu(c - a) \ .$$

Man bläht am besten die Terme so auf, dass nur noch die Differenzen aus Aufgabenteil (a) vorkommen. Dann sieht die Gleichung so aus:

$$(d - a) + \frac{1}{2}\lambda((a - d) + (b - a) + (a - d)) = \mu(\underbrace{(c - d)}_{=b-a} + (d - a))$$

und umgeordnet so:

$$(1 - \lambda - \mu)(d - a) = (\mu - \frac{1}{2}\lambda)(b - a) \ .$$

Nun überlegt man sich, dass $d - a, b - a$ linear unabhängig sind und folgert

$$\lambda = 2\mu \quad \text{und dann} \quad \mu = \frac{1}{3}, \lambda = \frac{2}{3} \ .$$

Damit erhalten wir

$$p = d + \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{2}(a + b) - d\Big) \tag{2}$$

als den gesuchten Schnittpunkt.

**(c)** Aus (2) ergibt sich $d = 3p - (a + b) = \frac{1}{2}(a + b)) + 3\big(p - \frac{1}{2}(a + b)\big)$. Daher ist $\mathsf{TV}\left(\frac{1}{2}(a + b), p, d\right) = 3$.

**(12)** Die Graden $\Delta_1, \Delta_2$ seien verschieden, nicht parallel zu $\Gamma$ und komplanar. dann ist $E = \Delta_1 \vee \Delta_2$ eine Ebene. Diese ist nicht parallel zu $\Gamma$ und schneidet die Ebenen $\Gamma, \Gamma'$ bzw. $\Gamma''$ jeweils in einer Graden, die mit $G, G'$ bzw. $G''$ bezeichnet sei. In der Ebene $E$ liegt dann genau die Situation des Satzes von Thales (Satz 14 in § 2) vor. Nun ist die Aussage entsprechend zu formulieren und eine analoge Projektion in $K^3$ anzugeben und die Invarianz von Teilverhältnissen unter affinen Abbildungen zu benutzen.

**(13)** Wenn $p_0 = a = x_1$, dann wird $p_1 = b = x_2$, $p_2 = c = x_3$, $p_3 = a = x_4 = x_1$, usf. Ähnlich verhält es sich, wenn $p_0 = b$. Sei ab jetzt $a \neq p_0 \neq b$, dann fällt auch kein weiterer der Punkte aus der Folge auf eine Dreiecksecke.
Zeige zunächst, dass für $k \geq 0$

$$(p_{k-1} \vee p_k) \| (x_{k+1} \vee x_{k+2}) \ .$$

Entsprechend der Anleitung werden Teilverhältnisse betrachtet. Wir vereinfachen die Schreibweise und stellen dabei mit Hilfe des Satzes von Thales (Spezialfall Strahlensatz) für $k \geq 1$ fest:

$$\lambda_k := \mathsf{TV}\,(x_{2k-1}, p_k, x_{2k+1}) \stackrel{!}{=} \mathsf{TV}\,(x_{2k-1}, p_{k-1}, x_{2k}) \ .$$

Durch fortgesetzte Anwendung des Satzes von Thales ($\stackrel{!}{=}$) ergibt sich entsprechend der Konstruktion der Punktfolge und mit Hilfe der Reduktion der Indizes der $x_i$ modulo 3:

$$\begin{array}{llll}
\boldsymbol{\lambda_k} = & \mathsf{TV}\,(x_{2k-1}, p_k, x_{2k+1}) = \mathbf{TV}\,(\boldsymbol{x_{2k-1}, p_{k-1}, x_{2k}}) & & \\
\lambda_{k+1} = & \mathsf{TV}\,(x_{2k+1}, p_{k+1}, x_{2k+3}) \stackrel{!}{=} \mathsf{TV}\,(x_{2k+1}, p_k, x_{2k+2}) = \mathsf{TV}\,(x_{2k+1}, p_k, x_{2k-1}) & = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - 1} & \\
\lambda_{k+2} = & \mathsf{TV}\,(x_{2k+3}, p_{k+2}, x_{2k+5}) \stackrel{!}{=} \mathsf{TV}\,(x_{2k+3}, p_{k+1}, x_{2k+4}) = \mathsf{TV}\,(x_{2k}, p_{k+1}, x_{2k+1}) & = \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1} - 1} & = \lambda_k \\
\lambda_{k+3} = & \mathsf{TV}\,(x_{2k+5}, p_{k+3}, x_{2k+7}) \stackrel{!}{=} \mathsf{TV}\,(x_{2k+5}, p_{k+2}, x_{2k+6}) = \mathsf{TV}\,(x_{2k-1}, p_{k+2}, x_{2k}) & = \frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_{k+2} - 1} & = \lambda_{k+1} \\
\lambda_{k+4} = & \mathsf{TV}\,(x_{2k+7}, p_{k+4}, x_{2k+9}) \stackrel{!}{=} \mathsf{TV}\,(x_{2k+7}, p_{k+3}, x_{2k+8}) = \mathsf{TV}\,(x_{2k+1}, p_{k+3}, x_{2k-1}) & = \frac{\lambda_{k+3}}{\lambda_{k+3} - 1} & = \lambda_k \\
\lambda_{k+5} = & \mathsf{TV}\,(x_{2k+9}, p_{k+5}, x_{2k+11}) \stackrel{!}{=} \mathsf{TV}\,(x_{2k+9}, p_{k+4}, x_{2k+10}) = \mathsf{TV}\,(x_{2k}, p_{k+4}, x_{2k+1}) & = \frac{\lambda_{k+4}}{\lambda_{k+4} - 1} & = \lambda_{k+1} \\
\lambda_{k+6} = & \mathsf{TV}\,(x_{2k+11}, p_{k+6}, x_{2k+13}) \stackrel{!}{=} \mathsf{TV}\,(x_{2k+11}, p_{k+5}, x_{2k+12}) = \mathbf{TV}\,(\boldsymbol{x_{2k-1}, p_{k+5}, x_{2k}}) & = \frac{\lambda_{k+5}}{\lambda_{k+5} - 1} & = \boldsymbol{\lambda_k}
\end{array}$$

Dabei wurde die folgende Regel für das Teilverhältnis benutzt:

$$\mathsf{TV}\,(x', p, x) = \frac{\mathsf{TV}\,(x, p, x')}{\mathsf{TV}\,(x, p, x') - 1} \quad \text{falls} \quad x' \neq p \ . \tag{3}$$

Aus der Gleichung $\mathsf{TV}\,(x_{2k-1}, p_{k-1}, x_{2k}) = \mathsf{TV}\,(x_{2k-1}, p_{k+5}, x_{2k})$ folgt nun $\boldsymbol{p_{k-1} = p_{k+5}}$ für $k \geq 1$.

Die konsequente rekursive Bearbeitung der ganzen Punktfolge ist zugegebenermaßen im Verhältnis zum Anliegen der Aufgabe übertrieben aufwendig und hier nur der Vollständigkeit wiedergegeben. **Für eine Bearbeitung der Übungsaufgabe reicht es aus, die ersten 6 Schritte am Dreieck zu verfolgen.**

**Das sieht dann ungefähr so aus:**

Sei zur Abkürzung $\lambda := \mathsf{TV}\,(a, p_0, b)$. Wie oben sei vorausgesetzt, dass $a \neq p_0 \neq b$. Da nach Konstruktionsvorschrift $p_0 \vee p_1 \parallel b \vee c$ ergibt der Satz des Thales (Spezialfall 1. Strahlensatz)

$$\mathsf{TV}\,(a, p_0, b) = \mathsf{TV}\,(a, p_1, c) = \lambda \ .$$

Beim nächsten Schritt wird $p_1 \vee p_2 \parallel a \vee b$ und man erhält

$$\mathsf{TV}\,(c, p_1, a) = \mathsf{TV}\,(c, p_2, b) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} =: \mu \ ,$$

wobei sich die vorletzte Gleichung mit (3) ergibt. So verfährt man weiter und erhält der Reihe nach

$$\begin{array}{lll}
\mathsf{TV}\,(b, p_2, c) & = \mathsf{TV}\,(b, p_3, a) & = \dfrac{\mu}{\mu - 1} \stackrel{!}{=} \lambda \\
\mathsf{TV}\,(a, p_3, b) & = \mathsf{TV}\,(a, p_4, c) & = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1} = \mu \\
\mathsf{TV}\,(c, p_4, a) & = \mathsf{TV}\,(c, p_5, b) & = \lambda \\
\mathsf{TV}\,(b, p_5, c) & = \mathsf{TV}\,(b, p_6, a) & = \mu \ .
\end{array}$$

Die letzte Gleichung zeigt uns, dass $\mathsf{TV}\,(a,p_6,b)=\frac{\mu}{\mu-1}=\lambda=\mathsf{TV}\,(a,p_0,b)$, was nur eintreten kann, wenn $p_0=p_6$.

**(14/15)** Sei $Y=p+\overrightarrow{Y}$.

**(a)** Da $K^n=\overrightarrow{Y}\oplus\langle\, v\,\rangle_K$, ist die Darstellung $y+\lambda v=x-p$ für alle $x\in K^n$ eindeutig. $\lambda$ hängt nicht davon ab, wie $y$ durch eine Basis dargestellt wird.

**(b)** Zunächst ist $\overrightarrow{Y}\oplus\langle\, v\,\rangle_K=K^n=\overrightarrow{Y}\oplus\langle\, w\,\rangle_K$ und $w=u+\mu v$ mit geeigneten $u\in\overrightarrow{Y}$ und $\mu\in K\setminus\{0\}$. **Wenn $\boldsymbol{\mu>0}$** und $x\in K^n$, dann ist

$$x-p=y+\lambda v=y+\lambda.\frac{1}{\mu}(w-u)=\underbrace{(y-\frac{\lambda}{\mu}u)}_{\in\overrightarrow{Y}}+\underbrace{\frac{\lambda}{\mu}}_{\substack{>0,\\ \text{wenn }\lambda>0}}w\ .$$

Damit folgt $\mathscr{H}_{Y,v}\subseteq\mathscr{H}_{Y,w}$. Die Inklusion „$\supseteq$“ergibt sich analog durch vertauschen der Rollen von $v$ und $w$, **wenn** zuvor gezeigt wird, dass in einer Darstellung $v=u'+\mu'w$ das Vorzeichen von $\mu'$ mit dem von $\mu$ übereinstimmt. Es gilt sogar $\mu\cdot\mu'=1$.
**Wenn $\boldsymbol{\mu<0}$** ist nur zu beachten, dass $\frac{\lambda}{-\mu}(-w)=\frac{\lambda}{\mu}w$. Dann folgt wie oben, dass $\mathscr{H}_{Y,v}\subseteq\mathscr{H}_{Y,-w}$ und durch Vertauschung von $v$ und $w$ die umgekehrte Inklusion.

**(c)** Sicher ist $[a,a']\subseteq a\vee a'$. Da $a$ und $a'$ nicht aus $Y$ sind und $[a,a']\cap Y\neq\varnothing$, ist $(a\vee a')\cap Y$ ein wohldefinierter Punkt, den wir o.E. als Stützpunkt $p$ für die Hyperebene wählen können. Seien etwa $a-p=y+\lambda v$, $a'-p=y'+\lambda' v$ und $p=\alpha a+\alpha' a'$ mit $\alpha+\alpha'=1,\alpha,\alpha'>0$(!). Dann ist $p=\alpha(p+y+\lambda v)+\alpha'(p+y'+\lambda' v')=p+\underbrace{(\alpha y+\alpha' y')}_{\in\overrightarrow{Y}}+\underbrace{(\alpha\lambda+\alpha'\lambda')}_{=0,\text{ da }p\in Y}v$. Es folgt $\alpha\lambda=-\alpha'\lambda'$, wobei $\alpha,\alpha'>0$. Daher haben $\lambda'$ und $\lambda$ unterschiedliches Vorzeichen.

**(d)** Die Abbildung $\ell:K^n\to K,u\mapsto(v\text{-Koordinate von }u):=\ell(x-p)$ ist linear als Hintereinanderausführung einer Projektion und einer Koordinatenabbildung. auf den Untervektorraum $\langle\, v\,\rangle_K$. Die Abbildung $f:K^n\to K,x\mapsto\ell(x-p)$ ist dann affin, denn für $x,x'\in K^n$ ist $f(x')-f(x)=\ell(x'-p)-\ell(x-p)=\ell(x'-x)$. Mit diesem $f$ gilt nun $f^{-1}(K_\geq)=\mathscr{H}_{Y,v}$.

**(e)** Dies folgt direkt mit Satz 7 in § 3.

**(16)** Zu dieser Aufgabe stelle ich demnächst eine Maple-Datei ins Netz.

**(17)** **(a)** Die Menge der Fixpunkte sei $F$ und sei etwa $f=T_v\circ\ell$. Dann ergibt sich direkt

$$F=\{x\in K^n:\ f(x)=x\}=\{x\in K^n:\ \ell(x)-x=-v\}=(\ell-\mathsf{Id}_{K^n})^{-1}(-v)\tag{4}$$

Ganz rechts steht ein aUR, also ist $F$ ein aUR.

Diskussion von (4) zur Vorbereitung von (b):

$F=\varnothing$ ist möglich, z.B. wenn $\ell=\mathsf{Id}_{K^n}$ und $v\neq0$. $|F|=1$, wenn $\ell-\mathsf{Id}_{K^n}$ invertierbar ist, 1 also kein Eigenwert von $\ell$ ist. $|F|>1$ ist nur möglich, wenn $\ell-\mathsf{Id}_{K^n}$ nicht injektiv ist und wenn außerdem $-v$ im Bild der linearen Abbildung $\ell-\mathsf{Id}_{K^n}$ liegt.

**(b)** Nach der Aufgabenstellung kann vorausgesetzt werden, dass $f$ affin und injektiv ist. Sei wieder $f=T_v\circ\ell$. Zwangsläufig ist $v=f(0)$. Nach (a) hat eine affine Abbildung genau dann einen Fixpunkt, wenn $-v\in\mathsf{Bild}\,(\ell-\mathsf{Id}_{K^n})$, und genau dann mehr als einen Fixpunkt, wenn zusätzlich $\ell-\mathsf{Id}_{K^n}$ nicht injektiv ist, also wenn $\ell$ einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 besitzt. Wenn aber $\ell$ einen solchen Eigenvektor $y$ besitzt, dann ist $f(y)=f(0)+\ell(y)=f(0)+y-0$, bzw. $f(y)-f(0)=y-0$ und es folgt $\varrho\|\,y-0\,\|=\|\,f(y)-f(0)\,\|=\|\,y-0\,\|\neq0$ und damit insbesondere $\varrho=1$. Wenn nun $\varrho\neq1$, wie in der Aufgabenstellung angegeben, dann muss $\ell-\mathsf{Id}_{K^n}$ injektiv und somit umkehrbar sein und das bedeutet nach (a), dass $|F|=1$ unabhängig von $v$.

**(18)** **(a)** Zwei affine Hyperebenen $\Gamma=a+U,\Gamma'=a'+U'$ sollen orthogonal heißen, wenn die orthogonalen Komplemente von $U,U'$ senkrecht aufeinander stehen, d.h. wenn für alle $u\in U^\perp,u'\in U'^\perp$ gilt: $(\!(u\,,u')\!)=0$.

**(b)** Seien $\Gamma_1 = a^{(1)} + U_1, \Gamma_2 = a^{(2)} + U_2, \Gamma_3 = a^{(3)} + U_3$ die paarweise orthogonalen Ebenen, an denen gespiegelt wird und seien $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ jeweils Erzeuger der orthogonalen Komplemente der Richtungen. Dann bilden diese eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$. Die drei Ebenen schneiden sich in genau einem Punkt $z$. Denn aus Dimensionsgründen schneiden sich etwa $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ in einer Graden und diese muss dann senkrecht stehen auf $\Gamma_3$. $z$ ist ein Fixpunkt aller drei Spiegelungen, also auch von $f$. Daher hat $g = T_{-z} \circ f \circ T_z$ den Fixpunkt 0 und ist linear ($g(y) - g(0) = \ell_g(y) - \ell_g(0)$, bzw. $g(y) = \ell_g(y)$).
Mit Hilfe einer Translation verschieben wir $z$ in den Nullpunkt und beschreiben die Spiegelungen zunächst an $U_1, U_2, U_3$.
Für $x = \alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)} + \alpha_3 u^{(3)}$ ist dann $x' = -\alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)} + \alpha_3 u^{(3)}$ das Bild der Spiegelung an $U_1$. Dieses gespiegelt an $U_2$ ergibt $x'' = -\alpha_1 u^{(1)} - \alpha_2 u^{(2)} + \alpha_3 u^{(3)}$ und die weitere Spiegelung an $U_3$ führt zu $x''' = -\alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)} - \alpha_3 u^{(3)} = -x$.
Die drei Spiegelungen hintereinander ergeben demnach die Abbildung $x \mapsto -x = g(x)$. Machen wir nun die Verschiebung wieder rückgängig, erhalten wir für $y = z + x \in \mathbb{R}^3$:

$$f(y) = T_z(g(T_{-z}(z + x))) = -x + z = -y + 2z \; .$$

**(19/20)** Die beiden Dreiecke bezeichne ich mit $\Delta_X, \Delta_Y$, wobei $X, Y$ wie in der Aufgabe erklärt sind.

**(a)** <u>o.E. kann angenommen werden, dass $x^{(1)} = 0 = y^{(1)}$:</u> $g$ und $h$ seien die Translationen mit $g(X) = X', h(Y) = Y'$. Es ist $g = T_{-x^{(1)}}, h = T_{-y^{(1)}}$. Sei $f$ eine Lösung des Ausgangsproblems und $f'$ eine Lösung des Problems für $X', Y'$. Dies bedeutet $\| f(X) - Y \| = \epsilon$ und $\| f'(X') - Y' \| = \epsilon'$ sind jeweils minimal minimal bezüglich $\mathcal{F}$. Da $\epsilon = \| fg^{-1}(X') - Y \| = \| hfg^{-1}(X') - Y' \| \geq \epsilon'$ und andererseits $\epsilon' = \| f'g(X) - Y' \| = \| h^{-1}f'g(X) - Y \| \geq \epsilon$, folgt $\epsilon = \epsilon'$. Führt man die Verschiebungen durch erhält man

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, Y' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \; .$$

**(b)** Nach Beobachtung 12 in § 5 ist :

$$\begin{aligned} \mathsf{Fläche}(\Delta_X) = \quad & \tfrac{1}{2} \cdot |\mathsf{det} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} | = \tfrac{1}{2} \cdot | - g + 1| \quad = 4 \\ \mathsf{Fläche}(\Delta_Y) = \quad & \tfrac{1}{2} \cdot |\mathsf{det} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \cdot | - 4 - 12| \quad = 8 \; . \end{aligned}$$

Gesucht ist $\varrho \in \mathbb{R}_+$ derart, dass $\mathsf{Fläche}(\Delta_{\varrho X'}) = \mathsf{Fläche}(\Delta_{Y'}) = 8$. Dabei ist $\mathsf{Fläche}(\Delta_{\varrho X'}) = \varrho^2 \mathsf{Fläche}(\Delta_{X'})$. Es folgt: $\varrho = \sqrt{2}$. Die zugehörige Streckung ist $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, z \mapsto \varrho z$.

**(c)** Sei $X'' := \varrho X'$. Wir suchen nun eine Matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \epsilon a & -\epsilon b \end{bmatrix}$ mit $\epsilon \in \{1, -1\}$ derart, dass $\| AX'' - Y' \|_F$ minimal wird. Man berechnet:

$$AX'' = \begin{bmatrix} 0 & -3a\sqrt{2} + b\sqrt{2} & -a\sqrt{2} + 3b\sqrt{2} \\ 0 & -3\epsilon b\sqrt{2} - \epsilon a\sqrt{2} & -\epsilon b\sqrt{2} - 3\epsilon a\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

und damit

$$d := \| AX'' - Y' \|_F = 20a^2 - 24ab + 20b^2 - 32b\sqrt{2} + 48 + 20\epsilon^2 b^2 + 24\epsilon^2 ba + 16\epsilon b\sqrt{2} + 20\epsilon^2 a^2 + 16\epsilon a\sqrt{2} \; .$$

Zwei Fälle sind zu betrachten:
<u>$\epsilon = 1$:</u> dann wird $d$ zu

$$d_1 = 40a^2 + 40b^2 - 16b\sqrt{2} + 48 + 16a\sqrt{2} \; .$$

Nun ist unter der Nebenbedingung $a^2 + b^2 = 1$ ein Minimum zu suchen. Die Aufgabe ist so gestellt, dass mit Hand gerechnet werden kann. Dabei ist ein Verfahren zur Minimierung mit Nebenbedingungen anzuwenden, wie Sie es in Ihren Analysisvorlesungen kennengelernt haben. Alternativ kann z.B. Maple oder vergleichbare Software benutzt werden. Mit der Maple-Anweisung

Optimization[Minimize](d1,{a^2+b^2=1});

erhalte ich (auf drei Stellen gerundet) als Minimum

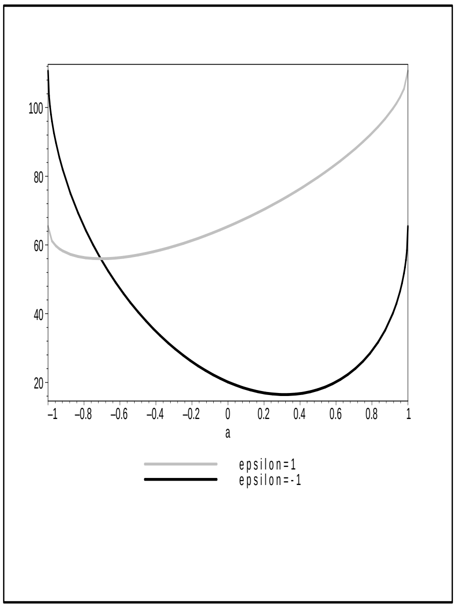
$$a_1 = 56,000 \text{ bei } a = 0,707, b = 0,707 \; .$$

$\underline{\epsilon = -1}$: Hier wird $d$ zu

$$d_2 = 40a^2 + 40b^2 - 48b\sqrt{2} + 48 - 16a\sqrt{2}$$

Auch hier ist unter der Nebenbedingung $a^2 + b^2 = 1$ ein Minimum zu suchen. Mit `Optimize[Minimize](d2,{a^2+b^2=1});` erhalte ich als Minimum

$$a_2 = 16,446 \text{ bei } a = 0,316, b = 0,949 \; .$$




Das gesuchte Optimum ist demnach $a_2$. Die Determinante der zugehörigen Bewegungsmatrix ist 1, es handelt sich also um eine Drehung. Der Drehwinkel kann nach [Sch] S. 6 unten berechnet werden. Man erhält (gerundet) $71,6°$.

**(21)** Ich gehe nach Anleitung vor und weise zunächst die Konvexität der Mengen $C_i$ nach. Natürlich genügt es, dies einmal zu tun. Seien dazu $S = [a, b]$ eine Strecke, $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ drei verschiedene parallele Geraden derart, dass $S \subseteq \Gamma''$ und $C = \{(a, b) \in \Gamma \times \Gamma' : \; (a \vee b) \cap S \neq \varnothing \}$.

Seien nun $(a, a'), (b, b') \in C$ und $\varrho, \sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\varrho + \sigma = 1$.

Da $(a \vee a') \cap S \neq \varnothing \neq (b \vee b') \cap S$, muss gelten

$$c = \alpha a + \alpha' a' \in S \quad \text{und} \quad d = \beta b + \beta' b' \in S$$

mit geeigneten $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$. Der Satz des Thales mit den Parallelen $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ und den Punktetripeln $(a, a', c), (b, b', d)$, oder direkter die Parallelprojektion entlang $\Gamma$, die ja Affinkombinationen erhält, kann nun benutzt werden, um zu sehen, dass $\alpha = \beta, \alpha' = \beta'$. Damit erhalte ich auf Grund der Konvexität von $S$:

$$\underbrace{\alpha(\varrho a + \sigma b) + \alpha'(\varrho a' + \sigma b')}_{\in \; (\varrho a + \sigma b) \vee (\varrho a' + \sigma b')} = \varrho(\alpha a + \alpha' a') + \sigma(\alpha b + \alpha' b') = \varrho c + \sigma d \in S \; ,$$

und somit $\varrho(a, a') + \sigma(b, b') = (\varrho a + \sigma b, \varrho a' + \sigma b') \in C$.

Nun ist zu zeigen, dass es unter den Voraussetzungen der Aufgabe eine Gerade gibt, die alle Strecken schneidet. Ich setze dabei voraus, dass keine zwei der Strecken kollinear sind (auf einer gemeinsamen Geraden liegen) und überlasse die Diskussion der Sonderfälle dem Leser oder der Leserin.

Eine Gerade, die drei verschiedene Strecken $S_i, S_j, S_k$ schneidet, ist dann nicht parallel zu $\Gamma, \Gamma'$ und schneidet $\Gamma$ in einem Punkt $a$, $\Gamma'$ in einem Punkt $b$. Deswegen ist $(a, b) \in C_i \cap C_j \cap C_k$ und somit der Durchschnitt je dreier verschiedener der $C_i$ nicht leer. Für je zwei der $C_i$ trifft dies ohnehin zu.

Um den Satz von Helly ganz direkt anzuwenden, müsste man nun ausgehend von $n = 4$ den Durchschnitt von je fünf der $C_i$ untersuchen. Das kann jedoch umgangen werden, da die Menge $\Gamma \times \Gamma'$ und damit die $C_i$ letztlich zweidimensional sind. Seien dazu etwa $\Gamma = p + \mathbb{R}u, \Gamma' = q + \mathbb{R}u$ mit geeignetem $u \in \mathbb{R}^2$. Nun betrachten wir die Abbildung $f : \Gamma \times \Gamma' \to \mathbb{R}^2$, $(p + \lambda u, q + \mu u) \mapsto (\lambda, \mu)$. Man bestätigt, dass $\Gamma \times \Gamma'$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist und $f$ affin und bijektiv. Auf die somit ebenfalls konvexen Mengen $f(C_i)$ können wir jetzt den Satz von Helly mit $n = 2$ anwenden und erhalten als Ergebnis, dass $\bigcap_{i=1}^{r} f(C_i)$ nicht leer ist und somit auch $\bigcap_{i=1}^{r} C_i$ nicht. Es gibt also eine Grade die alle $S_i$ schneidet.

**(22)** **(a)** Richtungsvektoren zweier Dreiecksseiten sind

$$u_{ab} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, u_{ac} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Damit kann eine orthonormierte Basis von $\langle\ u_{ab}, u_{ac}\ \rangle_{\mathbb{R}}$ berechnet werden (Gram-Schmidt-Verfahren):

$$e^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, e^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Nun sind die Koordinaten von $u_{a,b}, u_{ac}$ bezüglich $e^{(1)}, e^{(2)}$ zu berechnen. Man erhält

$$u_{ab} = \sqrt{10} \cdot e^{(1)}, u_{ac} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \cdot e^{(1)} + \frac{7\sqrt{10}}{5} \cdot e^{(2)} .$$

Schließlich erhält man die gesuchte Dreiecksfläche als

$$\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} \sqrt{10} & \frac{6\sqrt{10}}{5} \\ 0 & \frac{7\sqrt{10}}{5} \end{bmatrix} = 7 .$$

**(b)** Behauptung: $w \in W_a$. Beweis:

$$\begin{aligned} w = \quad & a + \left(\frac{\lambda_a}{\lambda} - \frac{\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c}{\lambda}\right) a + \frac{\lambda_b}{\lambda}\, b + \frac{\lambda_c}{\lambda}\, c \\ = \quad & a - \frac{\lambda_b}{\lambda}\, a - \frac{\lambda_c}{\lambda}\, a + \frac{\lambda_b}{\lambda}\, b + \frac{\lambda_c}{\lambda}\, c \\ = \quad & a + \frac{\lambda_b}{\lambda}\,(b - a) + \frac{\lambda_c}{\lambda}\,(c - a) \\ = \quad & a + w_a \qquad \in W_a . \end{aligned}$$

Ganz analog lässt sich zeigen, dass $w \in W_b$ und $w \in W_c$. Nun ist noch nachzuweisen, dass die drei Geraden $W_A, W_b, W_c$ sich in nur einem Punkt schneiden. Dieser muss dann $w$ sein.

**(23)** (i) Da die Eigenschaft zwischen zwei Punkten zu liegen eine affine Invariante ist, können wir ohne die Aussage der Aufgabe zu beeinträchtigen durch eine Translation erreichen, dass etwa der

Punkt $a$ im Nullpunkt liegt. Des weiteren können wir durch eine Drehung erreichen, dass $b$ ein Vielfaches des ersten kanonischen Basisvektors wird und schließlich durch eine Streckung, dass $b$ zusätzlich die Länge 1 hat. Es genügt, nun die Aussage für den Spezialfall der drei Punkte $0, e^{(1)}, c$ an Stelle von $a, b, c$ nach zuweisen.

(ii) Berechnung der Projektionen $p, q, r$: Sei etwa $c = \lambda e^{(1)} + \mu e^{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned}
p = &\quad e^{(1)} + \frac{\langle\!\langle -e^{(1)}, c - e^{(1)} \rangle\!\rangle^2}{\| \, c - e^{(1)} \, \|} (c - e^{(1)}) &&= e^{(1)} + \frac{1-\lambda}{(1-\lambda)^2 + \mu^2} (c - e^{(1)}) \\
q = &\quad \frac{\langle\!\langle e^{(1)}, c \rangle\!\rangle}{\| \, c \, \|^2} &&= \frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2} \, c \\
r = &\quad \frac{\langle\!\langle c, e^{(1)} \rangle\!\rangle^2}{\| \, e^{(1)} \, \|} \, e^{(1)} &&= \lambda \, e^{(1)}
\end{aligned}$$

(iii) Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned}
p \in [e^{(1)}, c] \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \le \frac{1-\lambda}{(1-\lambda)^2 + \mu^2} \le 1 \\
q \in [0, c] \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \le \frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2} \le 1 \\
r \in [0, e^{(1)}] \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \le \lambda \le 1 \, .
\end{aligned}$$

(iv) Symmetrieüberlegung zur Reduzierung der Anzahl der Fälle: Wenn zwei der drei Punkte $p, q, r$ nicht in der zuständigen Strecke liegen, ist zu zeigen, dass dann der dritte in „seiner “ Strecke liegt. Wenn wir annehmen, dass $q$ und $r$ falsch liegen, dann kann die Problemreduktion nach (i) bezüglich $a, b$ durchgeführt werden. Für die übrigen Punktepaare kann analog verfahren werden. Es genügt daher, den Fall $a = 0, b = e^{(1)}$ zu betrachten.

(v) Mit obigen Ergebnissen geht es nun weiter unter der Annahme, dass $q \notin [0, c]$ und $r \notin [0, e^{(1)}]$:
<u>$\lambda < 0$:</u> Dann ist
$-\lambda > 0, \quad 1 - \lambda > 1, \quad (1-\lambda)^2 + \mu^2 > 1 - \lambda$ und somit $0 < \dfrac{1-\lambda}{(1-\lambda)^2 + \mu^2} < 1$, bzw. $p \in [e^{(1)}, c]$.
<u>$\lambda > 1$:</u> Dann ist $0 \le \lambda < \lambda^2 + \mu^2$ und damit $q \in [0, c]$ entgegen der Annahme.
<u>$0 \le \lambda \le 1$:</u> Dann ist $r \in [0, e^{(1)}]$ entgegen der Annahme.

**(24)** **(a)** Es ist

$$\frac{\langle\!\langle a', a' + b' \rangle\!\rangle^2}{\langle\!\langle a' + b', a' + b' \rangle\!\rangle} = \frac{(1 + \langle\!\langle a', b' \rangle\!\rangle^2}{2 + 2\langle\!\langle a', b' \rangle\!\rangle} = \frac{1 + \langle\!\langle a', b' \rangle\!\rangle}{2} \, ,$$

denn $\| \, a' \, \| = \| \, b' \, \| = 1$. Da $1 + \langle\!\langle a', b' \rangle\!\rangle \ge 0$, folgt die Beziehung mit ${}^{+}\!\sqrt{\phantom{x}}$ .

**(b)** Es ist $\cos \measuredangle(a, a' + b') = \cos \measuredangle(a', a' + b') = \dfrac{\langle\!\langle a', a' + b' \rangle\!\rangle}{\| \, a' + b' \, \|} = {}^{+}\!\sqrt{\dfrac{1 + \langle\!\langle a', b' \rangle\!\rangle}{2}} = {}^{+}\!\sqrt{\dfrac{1 + \cos(\measuredangle(a', b'))}{2}} = \cos(\dfrac{\measuredangle(a', b')}{2})$

**(c)** Sei $y = \lambda(a' + b')$. Dann ist $\langle\!\langle a', y \rangle\!\rangle = \lambda(1 + \langle\!\langle a', b' \rangle\!\rangle) = \langle\!\langle y, b' \rangle\!\rangle$. Die Längen $|\langle\!\langle a', y \rangle\!\rangle|, |\langle\!\langle y, b' \rangle\!\rangle|$ der Projektionen $p_a, p_b$ sind somit gleich.

**(25)** **(a)** $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ sind genau dann affin unabhängig, wenn z.B. $a^{(1)} - a^{(0)}, \ldots, a^{(r)} - a^{(0)}$ linear unabhängig sind. Die lineare Unabhängigkeit der $a^{(i)} - a^{(0)}$ kann am Rang der Matrix

$$A = \left[ a^{(1)} - a^{(0)}, \quad \ldots, \quad a^{(r)} - a^{(0)} \right]$$

abgelesen werden. Der Rang einer Matrix lässt sich durch elementare Umformungen bestimmen. Bei diesen Umformungen wird der Zahlbereich, hier der Körper $K$, nicht verlassen, da nur Einträge von $A$ mit Elementen aus $K$ multipliziert und addiert werden.

**(b)** (i) $z = \dfrac{a+b+c}{3} \in K^2$.

(ii) $\underline{m:}$ Z.B. ist $\{m\} = M_{ab} \cap M_{ac}$. Deswegen ist $m$ bestimmt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} (\!(m\,, b-a)\!) &= (\!(\frac{a+b}{2}\,, b-a)\!) &=: \beta_1\ , \\ (\!(m\,, c-a)\!) &= (\!(\frac{a+c}{2}\,, c-a)\!) &=: \beta_2\ . \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt dies mit $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ beta_2 \end{bmatrix}$ die Gleichung $M = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}(b-a) \\ {}^{\mathrm{t}}(c-a) \end{bmatrix} \cdot m = \beta$. Da $a, b, c$ affin unabhängig sind, ist die Matrix $M$ invertierbar und $m = M^{-1}\beta$. Da $M^{-1}$ allein durch elementare Umformungen berechnet werden kann und das Produkt von Matrizen nur Operationen in $K$ erfordert, ist $m$ $K$-rational.

(iii) $\underline{h:}$ Z.B. ist $h = H_a \cap H_b$. Daher ist $h$ bestimmt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} (\!(h\,, b-c)\!) &= (\!(a\,, b-c)\!) \\ (\!(h\,, c-a)\!) &= (\!(c\,, a-b)\!) \end{aligned}$$

und man kann genau wie in (ii) argumentieren.

(iv) $\underline{f:}$ Es muss für $f$ gelten:

$$\left\| f - \frac{a+b}{2} \right\|^2 = \left\| f - \frac{b+c}{2} \right\|^2 = \left\| f - \frac{c+a}{2} \right\|^2 .$$

bzw.

$$\| f \|^2 - (\!(f\,, a+b)\!) + \left\| \frac{a+b}{2} \right\|^2 \tag{5}$$

$$= \quad \| f \|^2 - (\!(f\,, b+c)\!) + \left\| \frac{b+c}{2} \right\|^2 \tag{6}$$

$$= \quad \| f \|^2 - (\!(f\,, c+a)\!) + \left\| \frac{c+a}{2} \right\|^2 . \tag{7}$$

Die Gleichungen (5) und (6) ergeben:

$$(\!(f\,, c-a)\!) = \left\| \frac{b+c}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{a+b}{2} \right\|^2 = \beta_1\ .$$

Die Gleichungen (6) und (7) ergeben:

$$(\!(f\,, a-b)\!) = \left\| \frac{c+a}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{b+c}{2} \right\|^2 = \beta_2\ .$$

Man kann jetzt wieder wie in (ii) argumentieren.

**(26)** **(a)** Da $u \neq 0$, ist die Gleichung $a + xu = c$ für alle $c \in \mathbb{C}$ lösbar. Daher ist $a + \mathbb{C}u = \mathbb{C}$ und somit keine Grade.

**(b)** Siehe [Sch2], Seite 3.

**(c)** Es folgt

$$(a+b)^2 = 3ab \Rightarrow a^2 + b^2 = ab \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1 \underset{\text{mit } z=\frac{a}{b}\neq 0}{\Rightarrow} z + z^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z \in \{e^{\frac{2\pi i}{6}}, e^{-\frac{2\pi i}{6}}\} \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow |a| = |b|$$

Auf ähnliche Weise folgt

$$(a+b)^2 = 3ab \Rightarrow (a-b)^2 = -ab \Rightarrow (a-b)^2\overline{(a-b)^2} = (-ab)\overline{(-ab)} \Rightarrow |a-b|^2 = |a||b|$$

Da $|a| = |b|$, ergibt sich $|a-b| = |a| = |b|$ und das vorgelegte Dreieck ist gleichseitig.

**(27/28)** Gegeben sind

$$\varphi_h = {}^{\mathsf{t}}x\,A\,y,\ \text{mit } A = \mathsf{diag}\,(2,1,-1,-1),\quad \lambda = {}^{\mathsf{t}}x\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{bmatrix} - 1,\quad \mu = {}^{\mathsf{t}}x\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix} - 1\ .$$

**(a)** Weitere Bestimmung von $\ell$: Eine orthogonale Basiserweiterung

$$\text{von}\ \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\ \text{ist}\ \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\ .$$

Dies führt zu folgender orthogonalen (-normierten) Matrix $P$ für $\ell$:

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -1 & 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}.$$

Zur Abkürzung sei im Folgenden $v = f(0)$.

**(b)** Transformation der gegebenen Polynome:

$$\varphi_h(Py+v) = {}^{\mathsf{t}}(Py+v)A(Py+v) = {}^{\mathsf{t}}y\,{}^{\mathsf{t}}PAPy + 2\,{}^{\mathsf{t}}y\,{}^{\mathsf{t}}PAv + {}^{\mathsf{t}}vAv\ , \tag{8}$$

$$\lambda(Py+v) = \sqrt{3}\,y_3\ , \tag{9}$$

$$\mu(Py+v) = \sqrt{3}\,y_4\ . \tag{10}$$

Man braucht wegen (9) und (10) das Polynom $\varphi_h(Py+v)$ nicht komplett auszurechnen, da „modulo $y_3, y_4$“ gerechnet werden kann, bzw. in Gleichungen ausgedrückt: es kann $y_3 = 0, y_4 = 0$ gesetzt werden. In (8) ergibt sich so das gesuchte Polynom

$$\begin{aligned}\xi &= \varphi_h(Py+v)(y_1,y_2,0,0,)\\ &= -\frac{1}{6}y_1^2 - \frac{1}{6}y_2^2 + \frac{1}{3}y_1\,y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{6}\,y_1 + \sqrt{6}\,y_2 + 1\\ &= \frac{1}{6}\,[y_1,y_2]\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} + \sqrt{6}\,[y_1,y_2]\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ 1\end{bmatrix} + 1\ .\end{aligned}$$

**(c)** $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\varphi)$ ist ein einschaliges Hyperboloid. Da die Matrix $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ die Eigenwerte $0, -2$ hat und sich nach der Hauptachsentransformation (vgl [Sch] S.29) ein linearer Term in $y_2$ erhält, ist $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\xi)$ eine Parabel.

**(d)** Die euklidische Klassifikation von Quadriken arbeitet mit Bewegungen. In (a),(b),(c), wurde nur eine Bewegung durchgeführt. Der Typ ändert sich dadurch nicht.

Ein Maple-Arbeitsblatt zu Aufgabe (27/28) ist über die Vorlesungsseite zugänglich.

**(29)** Siehe Vorlesungsseite oder hier direkt: `Aufgabe_29.html`. Bei dieser Lösung wurde nach folgendem geometrischen Ansatz verfahren: Lege fest, welche der (projektiven) Punkte zu gegenüberliegenden Seitenpaaren gehören sollen sollen. Bestimme die beiden (projektiven) Schnittpunkte gegenüber liegender Seitenpaare. Diese erzeugen eine Gerade $G$, die beim Übergang zum Affinen als unendlich ferne Gerade dient. Es ist dann $v + U(G), v \neq U(G)$ eine affine Ebene mit der gewünschten Eigenschaft. Andere Ansätze sind möglich.

**(30)** Siehe

`http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/debart/histoire/construc_regle_seule.html#ch15`