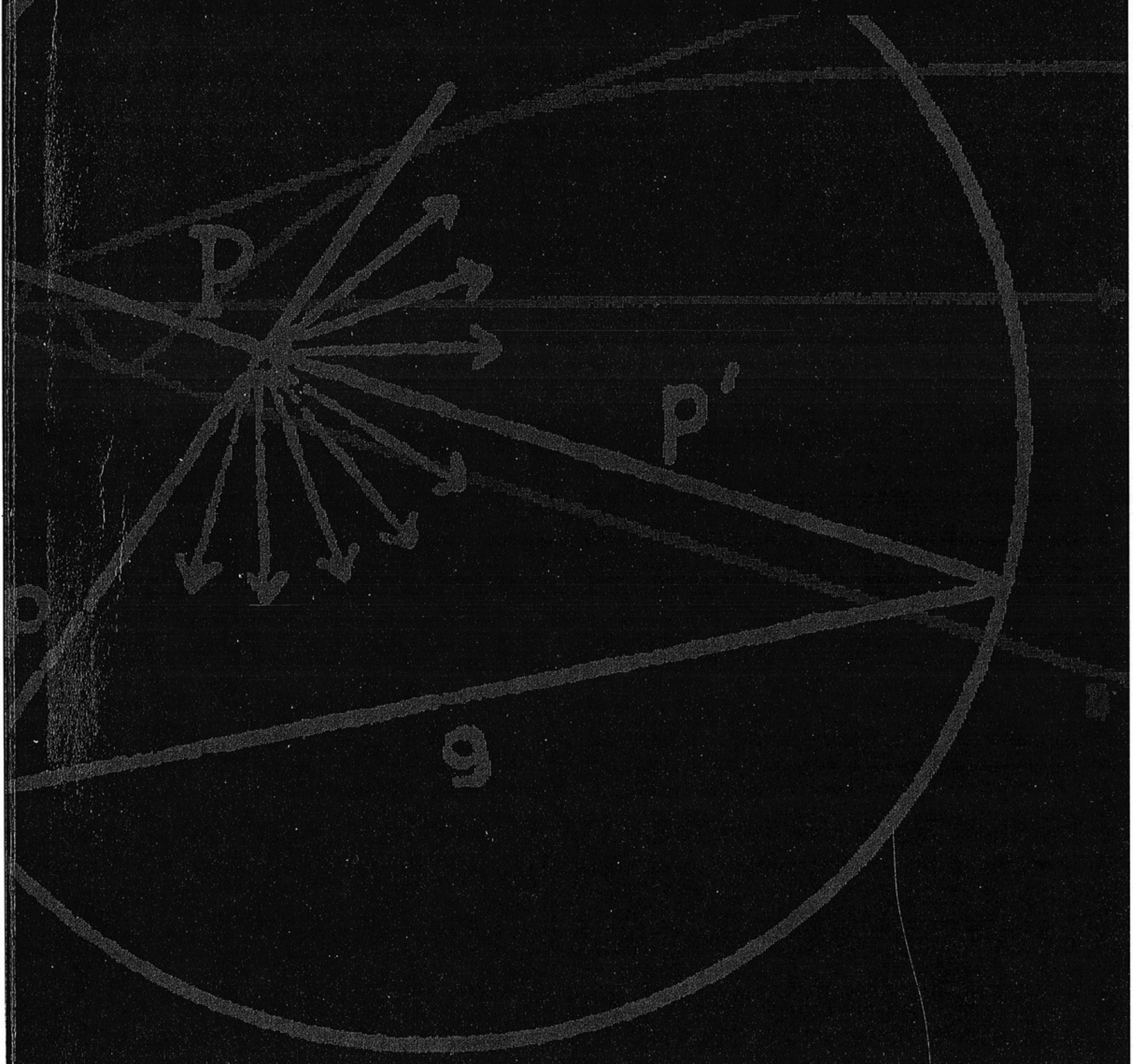
Friedrich Waismann

Einführung in das mathematische Denken

Herausgegeben von Heinz Jörg Claus



WISSENSCHAFTLICHE BUCHGESELLSCHAFT

Inhalt

Reprographischer Nachdruck 1996 der 2. Auflage, Wien 1947.

Einbandgestaltung: Neil McBeath, Stuttgart.

1. Auflage Gerold & Co., Wien 1936.
2. Auflage Gerold & Co., Wien 1947.
3. Auflage (Taschenbuchausgabe) dtv 1970.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Waismann, Friedrich:
Einführung in das mathematische Denken: die Begriffsbildung der modernen Mathematik / Friedrich Waismann. Hrsg. Heinz Jörg Claus. – 4. Aufl., Reprograph. Nachdr. der 2. Aufl., Wien, Gerold, 1947. – Darmstadt: Wiss. Buchges., 1996
ISBN 3-534-12821-4

Bestellnummer 12821-4

4. Auflage 1996

Gedruckt auf säurefreiem und alterungsbeständigem Werkdruckpapier
Druck und Einband: VDD – Darmstadt
Printed in Germany

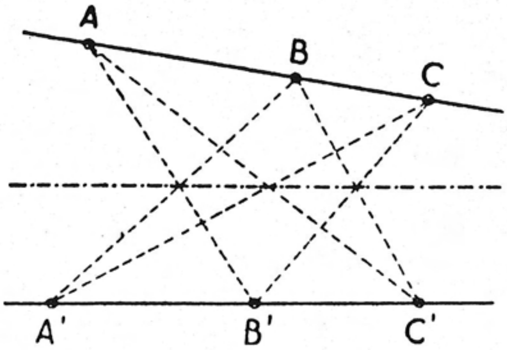
ISBN 3-534-12821-4

Anhang: Was ist Geometrie?

Wenn der Laie gefragt würde, was er unter Geometrie versteht, so wird er vielleicht etwas sagen wie: Die Wissenschaft von den Eigenschaften der Raumgebilde oder auch: von den geometrischen Eigenschaften. Aber wenn er nun aufgefordert würde, den Begriff der geometrischen Eigenschaft genauer zu umgrenzen, so wird er merken, daß seine Antwort noch nicht hinreichend ist, sondern daß eben hier ein neues Problem einsetzt: Ist jede räumliche Eigenschaft zugleich eine geometrische? Wir wollen sehen! Finde ich etwa beim Messen einer Strecke, daß sie ½ m lang ist, so ist das gewiß eine Eigenschaft dieser Strecke; aber niemand wird das Aufsuchen solcher Eigenschaften der Geometrie zuschreiben. F. Klein hat diesen Punkt einmal sehr drastisch erläutert durch den Ausspruch eines Kollegen, der behauptet hatte: wenn man von einem Dreieck den Mittelpunkt des Inkreises und den Mittelpunkt des Umkreises markiert, so liegt der zweite immer 3 mm östlich vom ersten; er habe sich durch wiederholte Messungen davon überzeugt. Wenn ein solcher Satz wahr wäre, so würde er eine Tatsache der Topographie oder Geographie beschreiben. Ein Lehrsatz über das gleichseitige Dreieck dagegen ist ein Satz ganz anderer Art: er spricht eine Tatsache aus, die nicht nur dieses eine Mal, sondern allemal zutrifft, er ist richtig nicht nur für diese eine Figur, sondern für eine Klasse von Figuren. Fragt man, was denn den Figuren einer Klasse gemeinsam ist, so lautet die Antwort: ihre Ähnlichkeit. Wir sehen erstens ab von der Lage, welche die Figur im Raum einnimmt, und zweitens von ihrer Größe, das heißt: wir fassen nur diejenigen Eigenschaften ins Auge, welche die Figur mit allen anderen der Klasse teilt. Was nicht allen Figuren einer Klasse zukommt, verdient nur ein individuelles Interesse und scheidet aus der Geometrie aus.

Was unter einer Klasse von Figuren zu verstehen ist, das hängt von uns ab, und in diesem Gedankengang kommt man leicht dazu, verschiedene „Geometrien" zu unterscheiden, je nach der Klasseneinteilung, die man trifft. In unserem Beispiel entstehen alle Figuren einer Klasse, wenn man eine von ihnen herausgreift und sie zwei Arten von Umformungen unterwirft: einer Bewegung im Raum und einer Ähnlichkeitstransformation, das heißt: einer Vergrößerung oder Verkleinerung bei Erhaltung der Form. (Bei räumlichen Gebilden tritt noch die Spiegelung hinzu, die zum Beispiel einen rechten Handschuh in einen linken überführt.) Nun kann man aus einer Figur auf mancherlei andere Weise neue herleiten, zum Beispiel durch Zentralprojektion. Photographieren wir eine auf der Tafel gezeichnete Figur von der Seite, so erhalten wir verschiedene Bilder, die im allgemeinen nicht mehr ähnlich sind. Denken wir uns nun die Figur auf alle erdenkliche Weise projiziert, so entsteht eine neue Klasse von Figuren, umfangreicher als die frühere, und wir können nun zusehen, ob wir

Eigenschaften finden, die allen Figuren einer solchen Klasse gemeinsam sind. Daß es tatsächlich solche Eigenschaften gibt, ist leicht zu sehen. Der Leser zeichne sich irgend zwei Gerade auf und wähle auf jeder drei Punkte, die der Reihe nach A, B, C, beziehungsweise A′, B′, C′ heißen mögen. Verbindet er nun die Punkte kreuzweise miteinander (das heißt A mit B′, A′ mit B; A mit C′, A′ mit C; B mit C′, B′ mit C), und markiert er die drei Schnittpunkte, so wird er finden, daß sie auf einer Geraden liegen. Diese Eigenschaft bleibt unzerstört, wenn man die ganze Figur photographiert. Bei der Formulierung dieses Satzes kommt es offenbar nicht auf die Längen oder die Winkel in der Figur an, sondern nur darauf, daß gewisse Punkte auf einer Geraden liegen. Mit der Untersuchung dieser Eigenschaften befaßt sich die „projektive Geometrie". Auf diesem Standpunkt spricht der Satz von dem gleichseitigen Dreieck keine geometrische Eigenschaft mehr aus, ja es ist bei der projektiven Denkart gar nicht mehr möglich, das gleichseitige Dreieck vor den anderen Dreiecken auszuzeichnen. Die Eigenschaften, welche die projektive Geometrie an den Tag hebt, sind mit dem Raumgebilde inniger verknüpft und viel weniger leicht zerstörbar als die Eigenschaften, welche die gewöhnliche Geometrie behandelt.



Figur 23.

Hätten wir statt des Photographierens das Umformen durch Parallelprojektion gewählt, so wären wir auf eine andere Geometrie gestoßen, die zwischen der gewöhnlichen und der projektiven eine Mittelstellung einnimmt: es ist dies die affine Geometrie. Der Leser denke sich im Raum zwei beliebige Ebenen. Auf die erste Ebene sei irgendeine Figur gezeichnet; welche Eigenschaften dieser Figur bleiben erhalten, wenn man sie durch Parallelstrahlen auf die zweite Ebene überträgt? Wenn die Figur ein Kreis ist, so wird sie in eine Ellipse übergehen. Kreis und Ellipse sind vom Standpunkt der affinen Geometrie nicht mehr zu unterscheiden. Die projektive Geometrie geht noch weiter, indem sie auch noch die Parabeln und Hyperbeln in dieselbe Klasse wirft, denn diese gehen durch Projektion auseinander hervor. Steigt man also von der gewöhnlichen oder der „metrischen" Geometrie über die affine zur projektiven auf, so verschwinden mehr und mehr die Unterschiede der Figuren und statt dessen treten die tiefer liegenden, allgemeineren Wesenszüge hervor. Es ist, als ob man von einem Gegenstand immer weiter zurückträte: die Einzelheiten fließen zusammen und wir gewahren nur mehr die großen Linien.

Will man diesen Gedanken schärfer umreißen, so muß man den fundamentalen Begriff der Gruppe heranziehen. So nennt der Mathematiker gewisse Systeme von Operationen, die in sich geschlossen sind. Betrachten wir zur Erläuterung eine Kugel, der ein Tetraeder eingeschrieben ist und fassen wir diejenigen Kugeldrehungen ins Auge, die das Tetraeder in sich überführen. Der Leser wird leicht feststellen, daß es genau 12 solche Drehungen gibt. Führt man zwei solche Drehungen hintereinander aus, so ergibt sich wieder eine Drehung derselben Art. Das Hintereinanderausführen zweier Drehungen wollen wir ihre Zusammensetzung nennen. Unsere 12 Drehungen haben nun die Eigenschaft, daß man durch Zusammensetzung immer wieder eine dieser Drehungen erhält, daß man also aus dem Kreis dieser 12 Operationen nicht heraustreten kann. Das ist die wichtigste Eigenschaft einer Gruppe. Bei den verschiedenartigsten Untersuchungen sind die Mathematiker auf solche merkwürdige Organismen gestoßen und haben allmählich ihre Eigenschaften herausgeschält. Die vollständige Definition lautet: Eine Gruppe ist ein System von Dingen — etwa Operationen — in endlicher oder unendlicher Anzahl, die folgenden fünf Forderungen genügen:

1. Es soll eine Vorschrift bestehen, nach der zwei Dinge zu einem zusammengesetzt werden können. Wir nennen die Dinge die Elemente und bezeichnen sie mit A, B usw., die Zusammensetzung nach Art der Multiplikation mit $A \cdot B$. Die erste Forderung besagt nun, daß die Zusammensetzung $A \cdot B$ eindeutig sein soll.

2. Das Element $A \cdot B$ soll wieder demselben System angehören: man soll also aus dem System nicht heraustreten können, wie immer man die Elemente zusammensetzt.

3. Die Zusammensetzung soll assoziativ sein, das heißt es soll $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ sein. Kommutativität wird dagegen nicht gefordert.

4. Es soll in unserem System ein bestimmtes Element E geben, das, mit jedem beliebigen anderen Element zusammengesetzt, dieses Element wiedergibt, für das also die Beziehung gilt: $A \cdot E = E \cdot A = A$. (Das Element E heißt „Einheitselement", da es bei der Zusammensetzung der Elemente eine ähnliche
A16 Rolle spielt wie die Zahl 1 bei der Multiplikation von Zahlen.

5. Zu jedem Element A soll es ein inverses Element $\overline{A}$ geben, so daß

$$A \cdot \overline{A} = \overline{A} \cdot A = E \text{ ist.}$$

Ein Beispiel einer Gruppe ist die Gesamtheit der Bewegungen im Raum; denn zwei Bewegungen setzen sich wieder zu einer Bewegung zusammen, und jede Bewegung kann durch eine inverse rückgängig gemacht werden; das Einheitselement entspricht dabei der Ruhe als dem Grenzfall der Bewegung.

Kehren wir nun zur Betrachtung der verschiedenen Geometrien zurück, so finden wir, daß die räumlichen Transformationen, die eine bestimmte Klasse von Figuren erzeugen, gerade immer eine Gruppe bilden. So sind es die Bewegungen, die Ähnlichkeitstransformationen und der Prozeß der Spiegelung, welche die elementar-geometrischen Eigenschaften eines Raumgebildes ungeändert lassen. Diese Transformationen (sowie alle weiteren, die sich aus ihnen zusammensetzen) bilden eine Gruppe, die man als *Hauptgruppe* der räumlichen Transformationen bezeichnet. Man kann nun sagen: Die gewöhnliche Geometrie faßt solche Eigenschaften ins Auge, die invariant bleiben gegenüber allen Transformationen der Hauptgruppe. Damit hat das, was man sonst mehr gefühlsmäßig als „wesentliche" Eigenschaft eines Raumgebildes ansieht, im Gegensatz zu einer „zufälligen", eine exakte Formulierung erfahren.

Ersetzt man die Hauptgruppe durch eine umfassendere, so bleibt nur ein

Teil der Eigenschaften invariant. Fügt man die Parallelprojektionen hinzu, so entsteht die affine Gruppe, nimmt man außerdem die Zentralprojektionen auf, so entsteht die projektive Gruppe, die in der affinen, beziehungsweise projektiven Geometrie ganz dieselbe Rolle spielt wie die Hauptgruppe in der „metrischen" Geometrie. Je umfassender die Gruppe ist, die wir ansetzen, desto mehr dringen wir in die Tiefe. Die Eigenschaften, welche die metrische Geometrie erforscht, sind am leichtesten zerstörbar, sie liegen in der obersten Schicht. Die affinen Eigenschaften liegen schon tiefer, die projektiven noch tiefer. Bei dieser Auffassung erscheint die Gruppe als das Führende: Ein Typus geometrischen Forschens entsteht erst, wenn eine Mannigfaltigkeit und in ihr eine Gruppe von Transformationen gegeben ist. Wir können mit Felix Klein, der diese Gedanken zuerst in seinem „Erlanger Programm" ausgeführt hat, sagen: Jede Geometrie ist Invariantentheorie bezüglich einer bestimmten Gruppe.

Hier eröffnet sich uns ein Ausblick auf eine unendliche Reihe von Geometrien, die sich ergeben, wenn man die Hauptgruppe nach verschiedenen Richtungen erweitert. So kann man von der metrischen Geometrie ausgehend zur „Geometrie der reziproken Radien" gelangen. Man faßt hier nur solche Eigenschaften einer Figur auf, die außer bei den Transformationen der Hauptgruppe auch noch bei der Spiegelung an einem festen Kreis (der Abbildung durch reziproke Radien) erhalten bleiben. Dabei zeigt es sich zum Beispiel, daß Gerade und Kreise ineinander übergeführt werden, so daß man diese beiden Arten von Figuren in eine Klasse vereinigen muß.

Schließlich führen wir einen letzten Schritt aus und erheben uns zur Geometrie aller ein-eindeutigen und stetigen Punkttransformationen. Hier sucht man das Bleibende gegenüber beliebigen stetigen Verzerrungen. Von diesem Standpunkt aus sind zum Beispiel eine Kugel, ein Würfel und eine Pyramide nicht wesentlich verschieden; jedes dieser Gebilde kann durch eine stetige Verzerrung in das andere übergeführt werden. Dagegen gehören zum Beispiel eine Kugel und ein Torus (ein Pneumatikschlauch) ganz verschiedenen Körperklassen an: es ist offenbar unmöglich, das eine Gebilde stetig durch eine Reihe von Zwischenformen in das andere überzuführen. Die Eigenschaften, die jetzt zutage treten, bilden den Gegenstand der Topologie. Ein Lehrsatz der Topologie sagt zum Beispiel, daß Knoten weder im 2- noch im 4-dimensionalen Raum möglich sind, sondern nur im 3-dimensionalen. Ein anderes Beispiel einer topologischen Eigenschaft können wir uns an dem Möbiusschen Band klarmachen. Der Leser nehme einen Papierstreifen, biege seine beiden Enden zusammen, so daß ein geschlossener Ring entsteht, verdrehe aber vorher das eine Ende um 180°, so daß die Vorderseite des Streifens in die Rückseite übergeht — er erhält dann eine Fläche, welche nur eine Seite hat. Ein Wanderer, welcher sich auf dieser Fläche bewegt, würde nach einem Umlauf zwar an dieselbe Stelle zurückkommen, sich aber nun auf der entgegengesetzten Seite des Papierstreifens befinden, so daß eine Unterscheidung zweier Seiten der Fläche keinen Sinn mehr hat. Es ist klar, daß diese Eigenschaft gegenüber beliebigen stetigen Umformungen invariant bleibt und daß die Unterscheidung von einseitigen und zweiseitigen Flächen eine topologische Bedeutung hat. Um

auch eine Fragestellung auf diesem Gebiet zu nennen, sei der „Vierfarbensatz“ zitiert: Die Geographen haben empirisch gefunden, daß, wie immer die politische Karte eines Erdteils aussieht, vier Farben zur Unterscheidung der verschiedenen Staaten genügen. Ein exakter Beweis für diesen Satz konnte bisher
A17 nicht erbracht werden.

Geht man noch weiter zu den allgemeinsten eineindeutigen Punkttransformationen, so hat man den Standpunkt der *Mengenlehre* erreicht. Von diesem Gesichtspunkt ist auch der Unterschied der Dimensionen verschwunden: eine Strecke, eine Fläche, ein Körper können Punkt für Punkt aufeinander abgebildet werden, sind also nur verschiedene Repräsentanten einer Klasse. Von der ganzen reichen Welt geometrischer Gestalten bleiben jetzt nur ganz wenige Züge übrig, so der Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Punktmengen.

Der Begriff der Dimension gehört dem Begriffssystem der Topologie an, und wir erkennen nun klarer, warum er bei den allgemeinsten, auf die eineindeutigen Transformationen gerichteten Untersuchungen Cantors keine Stelle hat.

In der Reihe der Geometrien steht also an dem einen Ende die metrische Geometrie (oder eigentlich die Topographie, die jedes räumliche Gebilde individuell auffaßt), am anderen Ende die Mengenlehre. Jeder anderen Geometrie kommt ein bestimmter Platz zwischen diesen Extremen zu.